

СИММЕТРИЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПРОНИЦАЕМОГО КЛИНА СТРУЕЙ ВЫТЕКАЮЩЕЙ ИЗ КАНАЛА

Абдылдаев М.Ю., Шамуратов К.Т., Исаков Б.О

1. Рассматривается симметричное струйное обтекание проницаемого клина с углом раствора 2α потоком жидкости, вытекающей из канала, ограниченного плоскими стенками (рис. 1).

Поток ограничен параллельными стенками оси X , расстояние между стенками равно $2h$. Набегающий поток имеет в бесконечности скорость $V_\infty = V_H$. Скорость насвободой поверхности равна v_0 . Ввиду симметрии течения нам достаточно будет исследовать верхнюю половину течения, заменив оси симметрии X твердой стенкой.

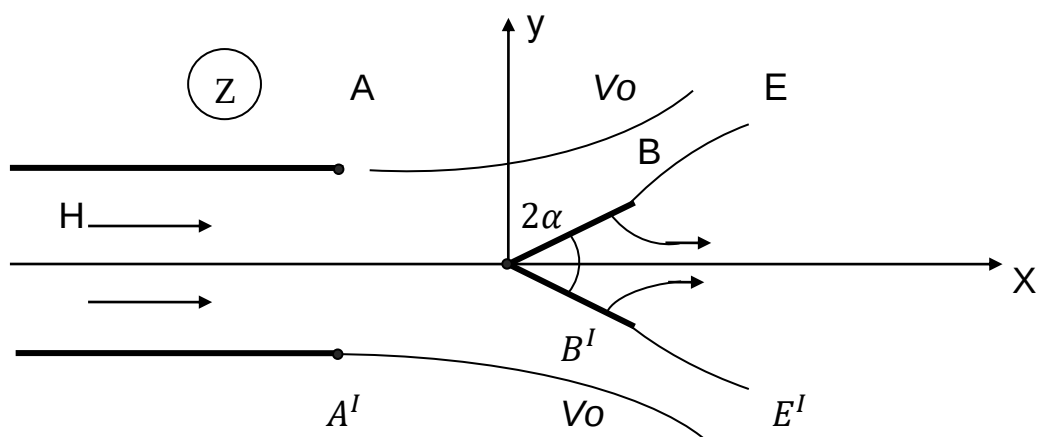


Рис.1.Картина течения в физической плоскости $z = x + iy$.

2. Примем следующую схему течения. Перед клином в потоке ($X < 0$) течение безвихревое. За проницаемой поверхностью ($X > 0$) находится зона завихревого течения с прямолинейными линиями тока. Предпо-

ложение о прямолинейности линий тока за контуром эквивалентно предположению о постоянстве давления во вторичном потоке. В области безвихревого движения $X < 0$ перед контуром справедлив интеграл Бернулли

$$\rho(U + V^2) + 2P = \rho V_0^2 + 2P_0 \quad (2.1)$$

используя, линейный закон протекания, а так же закон сохранения массы и постоянстве давления во вторичном потоке, получим граничное условие [2;3]

$$U^2 + V^2 + 2\alpha_0 U = 1, \quad (2.2)$$

позволяющее находить потенциальное течение перед контуром независимо от обтекания в целом. (U и V -безразмерные величины, $\alpha_0 = K/V_0$)

3. В плоскости годографа скорости $zZ = U - iV$ области СВЕАН, соответствует половина круговой луночки (рис.2). Свободные линии тока ВЕ и АЕ, на которых выполняется условие $U^2 + V^2 = 1$, переходят в дугу единичной окружности, лежащую в четвертой четверти. Соотношение (2.2) на проницаемой поверхности равносильно условию

$$(U + \alpha_0)^2 + V^2 = (\sqrt{1 + \alpha_0^2})^2, \quad (3.1),$$

поэтому линия СВ соответствует дуга окружности с центром в точке $(-\alpha, 0)$ и радиусом $\sqrt{1 + \alpha_0^2}$, эта окружность пересекает ось U в точке $(\sqrt{1 + \alpha_0^2} - \alpha, 0)$.

Линия НА соответствует стенкам канала, а НС соответствует луч НС действительной оси X (рис.2).

Введем параметрическую переменную $t = \xi + i\eta$, такую, что в плоскости t области течения соответствует верхняя полуплоскость $Im(t) > 0$, а границе области течения НСВЕА соответствует действительная ось ξ (рис.3).

Найдем конформное отображение $zZ = \frac{dw}{v_0 dz}$ на t с помощью нескольких последовательных конформных отображений.

$$zZ(t) = -e^{-i\alpha} \frac{1 + zZ}{1 - zZ}; \quad zZ_2 = zZ_1 + i \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha};$$

$$zZ_3 = zZ_2 e^{-i\lambda_0}; \quad zZ_4 = \ln \frac{zZ_3}{|zZ_3|}; \quad zZ_4 = \ln \left\{ \frac{1+t}{1-t} \right\}^{\lambda/1}$$

$\lambda_0 = \pi + \theta_0$; $\lambda_1 = \frac{\pi}{2} + \theta_0$; θ_0 – угол между касательными линиями к окружностям в точке В. (рис.2).

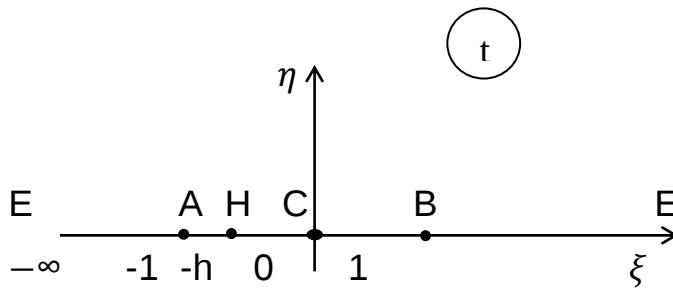


Рис.3. Параметрическая плоскость $t = \xi + i\eta$

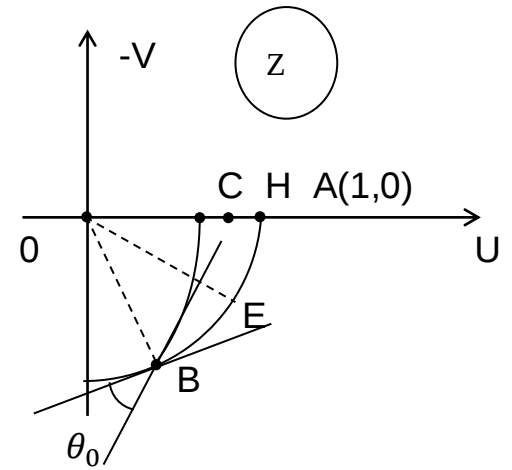


Рис.2. Область течения в плоскости годографа $zZ = U - iV$.

Отображение $zZ(t)$ дает формула

$$zZ(t) = -e^{-i\alpha} \frac{1 - \cos \alpha - i \sin \alpha + e^{-i\lambda_0} n \left\{ \frac{1+t}{1-t} \right\}^{\lambda_1/\pi}}{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha - e^{-i\lambda_0} n \left\{ \frac{1+t}{1-t} \right\}^{\lambda_1/\pi}} \quad (3.2)$$

$$n = |zZ_{3C}| = |zZ_{3E}|.$$

$$zZ_{3E} = i \left(\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{1 - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \right) \quad (3.3)$$

Формулу (3.2) нетрудно проверить непосредственно. В самом деле, определенная с помощью (3.2) функция $z(t)$ всюду в верхней полуплоскости t ($\text{Im} t \geq 0$) аналитична. Следовательно, остается только проверить выполнения граничных условий или, что одно и то же соответствие (3.2) с рис. 2 и 3. В формуле (3.2) обеспечено нужное соответствие характерных точек границы.

$$zZ(1) = e^{-i\alpha}; \quad Z_3(-1) = 1$$

На линии АВ имеем также $|Z_3(t)| = 1$, ($-\infty < \xi \leq -1$, $1 \leq \xi < +\infty$).

Далее, на действительной оси $-1 < \xi < 0$ и $0 < \xi < 1$.

Функция $zZ(t)$ принимает действительные положительные значения. Обходя в верхней полуплоскости t точку С ($t=0$) против часовой стрелки по бесконечно малой полуокружности, убеждаемся, что аргумент $Z_3(t)$ на ВС ($0 < t \leq 1$) равен $\alpha = \pi\eta$, т.е. граничные условия всюду выполняются.

4. Далее, будем находить $z=z(t)$.

Сначала, найдем вспомогательную функцию [3] так называемую функцию Х.А. Рахматулина:

$$\Omega(t) = \ln \frac{dz}{dt} = a + ib. \quad (4.1)$$

Найдем $b(t)$ при $t = \xi$, на действительной оси. При этом имеем:

$$-\infty < \xi < -1, \quad b(\xi) = \beta + \Lambda_1(\xi),$$

$$-1 < \xi < -h \quad b(\xi) = \pi,$$

$$-h < \xi < 0, \quad b(\xi) = 0,$$

$$0 < \xi < 1, \quad b(\xi) = \alpha,$$

$$1 < \xi < +\infty, \quad b(\xi) = \beta + \Lambda_2(\xi).$$

$$\Lambda_i(\xi) = \text{arctg} \frac{V(\xi, 0)}{U(\xi, 0)}, \quad (i = 1, 2)$$

Для упрощения расчета сделаем дополнительное дробно-линейное преобразование верхней полуплоскости t на себя

$$t \rightarrow W; \quad W = \frac{t}{t + 1/2}, \quad t(W) = \frac{W}{2(1 - W)}$$

Обозначая $\gamma = \operatorname{Re}(W)$, перейдем к модифицированным функциям

$$\Omega_I(W) \text{ и } \Lambda_i(\gamma) (i = 1, 2).$$

$$\Omega_I(W) = \Omega[t(W)], \Lambda_i(\gamma) = K_i \Lambda_i\left(\frac{\gamma}{2(1-\gamma)}\right) \quad (4.2)$$

В итоге получаем следующую вспомогательную краевую задачу для отыскания в верхней полуплоскости W аналитической функции $\Omega_I(W)$

по значению ее мнимой части на действительной оси γ :

$$-\infty < \gamma < 0, \quad \operatorname{Im}(\Omega_I) = 0,$$

$$0 < \gamma < \frac{2}{3}, \quad \operatorname{Im}(\Omega_I) = a,$$

$$\frac{2}{3} < \gamma < 1, \quad \operatorname{Im}(\Omega_I) = \beta + K_I * \Lambda_I(\gamma),$$

$$1 < \gamma < 2, \quad \operatorname{Im}(\Omega_I) = (-\pi + \beta) + K_2 * \Lambda_I(\gamma),$$

$$2 < \gamma < h_I, \quad \operatorname{Im}(\Omega_I) = \pi,$$

$$h_I < \gamma < +\infty, \quad \operatorname{Im}(\Omega_I) = 0.$$

Следовательно, эту функцию можно восстановить, по интегральной формуле Шварца [4]:

$$\Omega_I(W) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \Omega_I(\gamma)}{\gamma - W} d\gamma + C. \quad (4.3)$$

(C -произвольная действительная постоянная).

После вычисления, имеем
$$\Omega_I(W) = \ln \left\{ \frac{W - \frac{2}{3}}{W} \right\}^{\alpha/\pi} \left\{ \frac{2-W}{\frac{2}{3}-W} \right\}^{\frac{\beta}{\pi}} \left\{ \frac{1-W}{2-W} \right\}^{\frac{h_I-W}{2-W}} + \frac{\beta}{\pi} \left\{ \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{\Lambda_I(\gamma)}{\gamma-W} d\gamma + \int_1^2 \frac{\Lambda_2(\gamma)}{\gamma-W} d\gamma \right\} + C. \quad (4.4)$$

$$\left(h_I = \frac{2h}{2h-1} \right).$$

Используя (3.2)-(4.1), находим искомую функцию $Z(t)$ в виде:

$$\begin{aligned}
ZZ(t) = & \\
= C_0 \int_0^t & \left\{ \frac{\tau-1}{\tau} \right\}^{\frac{\alpha}{\pi}} \left\{ \frac{\tau+1}{1-\tau} \right\}^{\frac{\beta}{\pi}} \left\{ \frac{h_I(1+2\tau)-2\tau}{4(1-\tau)^2} \right\} \exp \left[\frac{\beta}{\pi} \left(\int_{\frac{2}{3}}^I \frac{\Lambda_1(\gamma)}{\gamma - \frac{2\tau}{2\tau+1}} d\gamma \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_1^2 \frac{\Lambda_2(\gamma)}{\gamma - \frac{2\tau}{2\tau+1}} d\gamma \right) \right] d\tau
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\text{где } \Lambda_1(\gamma) = \Lambda_2(\gamma) = \beta \operatorname{arctg} \frac{v(\gamma; 0)}{u(\gamma, 0)}. \tag{4.6}$$

Формулы (3.2). (4.5) дают параметрическое решение задачи о набега-нии плоской струи идеальной несжимаемой жидкости, вытекающей из канала, на симметричную плоскую проницаемую поверхность.

5. С помощью формулы (3.2) и (4.5) можно вычислить геометрические, кинематические и другие элементы задачи.

Если обозначить расстояние между стенками канала $2L$ и ско-рость в бесконечности в точке H $V_\infty = V_H$, то имеем

$$2L = \frac{2q}{V_0 \zeta(-h)}, \zeta(-h) = \frac{V_\infty}{V_0} = \left(\frac{dW}{V_0 dZ} \right)_H, \text{ т.е. параметр } h \text{ определяет скорость}$$

в сосуде на бесконечности.

С помощью (4.5) можно найти и длину щеки ℓ т. е.

$$\ell = C_0 e^{-ia} \int_0^1 f(\tau) d\tau. \tag{5.1}$$

где $f(\tau)$ – под интегральное выражение (4.5).

Отношение ℓ/L , а также угол раствора клина $2\alpha(2\pi i)$ являются геометрическими элементами. При числовых расчётах удобнее зада-вать математические параметры α, β и h и определить ℓ/L , где β угол который струя образуется с осью X в бесконечности (рис.1). Отноше-ние ℓ/L исключает постоянная C_0 в формуле (4.5). Далее, можно найти

и сопротивление клина X , или что равносильно коэффициент сопротивления клина

$$C_x = \frac{X}{\rho \ell \sin \alpha * V_\infty^2} . \quad (5.2)$$

$$\text{где } X = \rho L V_H^2 \left(\frac{V_0^2}{V_H^2} - 2 \frac{V_0}{V_H} \cos \alpha + 1 \right) \quad (5.3)$$

(X – сопротивление клина в задаче об обтекании клина потоком конечной ширины [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х.А., Гувернюк С.В. О постановке задач обтекания проницаемых тел несжимаемой средой. // Парашюты и проницаемые тела. М.:Изд-во МГУ, 1987.С.5-24.
2. П.Р. Андронов, С.В. Гувернюк. Решения задачи о плоской струе, натекающей на бесконечный проницаемый экран // Проблемы современной механики. М.: Из-во МГУ, 1998.
3. Бучин В.А. Решение задачи об обтекании проницаемой пластинки с отрывом струей // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. №6.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 4-е. М.: Наука. 1973. 606с
5. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. Гос. Изд-во физико-матем. литературы. М.: 1961.