

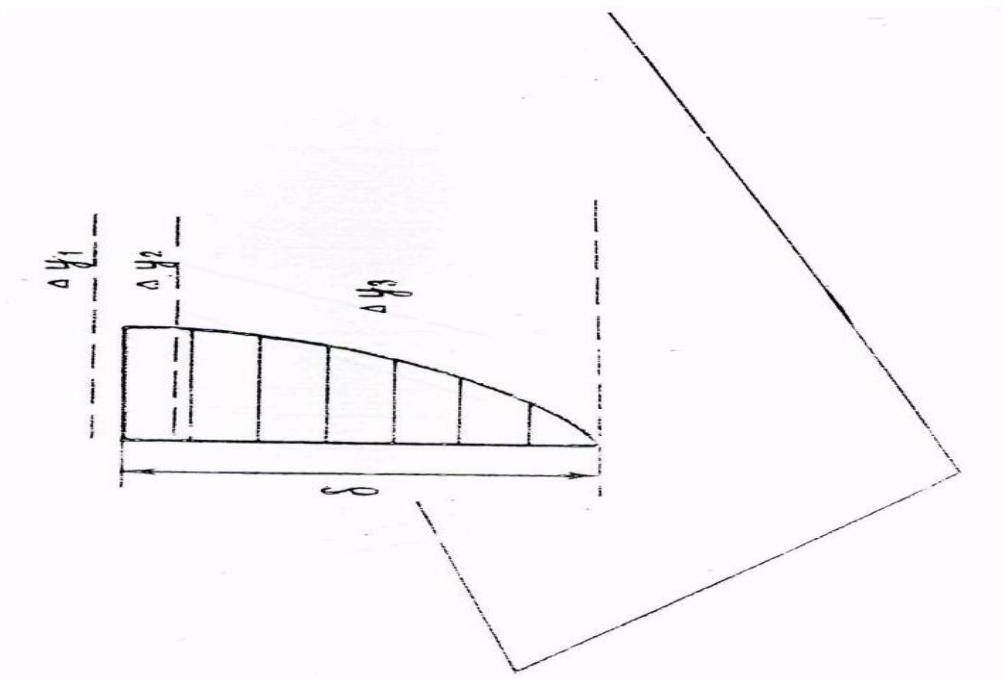
ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ПРИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Бийбосунов А.И.

КГНУ им. Ж. Баласагына

При асимптотическом анализе будем использовать обозначения для различных областей возмущенного течения: область I – возмущенная часть внешнего невязкого течения, ее характерная толщина.

$$\Delta y_1 > \delta \sim O(\varepsilon)$$



Область II – основная часть пограничного слоя с характерной толщиной:

$$\Delta y_2 \sim \delta$$

Вязкая пристеночная область III с характерной толщиной:

$$\Delta y_3 < \delta$$

При построении асимптотической теории вихрей Гертлера в пограничном слое жидкости будем предполагать, что потеря устойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности вызывает нелинейные возмущения функций течения в области их локализации, например:

$$\Delta u \sim u$$

Следовательно, возмущения от вихрей уже в первом приближении влияют на характеристики основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности. В поле центробежных сил тогда возникают возмущения давления:

$$\Delta P \sim k u^2 \Delta y$$

которые индуцируют поперечные составляющие скорости:

$$w \sim \Delta w \sim \Delta P^{1/2} \sim k^{1/2} u \Delta y^{1/2}$$

Так как оценки для P , u и w получаются из сопоставления порядков величин конвективных членов уравнений, то, очевидно, механизмы конвекции являются основными в процессе порождения вторичного вихревого течения.

Пусть возмущения зарождаются в области с характерной толщиной в виде:

$$\Delta y \sim O(a) < \delta \sim O(\varepsilon),$$

то есть толщиной меньшей, чем толщина пограничного слоя, расположенного непосредственно около вогнутой поверхности, где завихренность основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности является наибольшей, а функции течения изменяются пропорционально расстоянию от поверхности, например:

$$u \sim \Delta y / \varepsilon$$

Тогда справедливы следующие оценки для функций течения:

$$\begin{aligned} u &\sim O(a/\varepsilon) \\ \Delta P &\sim O(\varkappa a^3/\varepsilon^2) \\ w &\sim O(\varkappa^{1/2} a^{3/2}/\varepsilon) \end{aligned} \tag{1}$$

Принимая, что в общем случае толщина возмущенной области «а» соизмерима с ее шириной - $\Delta z \sim O(c) \sim O(a)$, и приравнивая порядки величин членов уравнения неразрывности, можно получить, что:

$$a \sim c \sim O(\varepsilon b^2) \quad (2)$$

где « a », « b » и « c » - характерные толщина, протяженность и ширина пространственной возмущенной вихревой области течения, и:

$$\varepsilon^2 < a < c < b < 1$$

Соотношения (1) и (2) позволяют оценить порядки величин конвективных и основных диссипативных членов уравнений движения:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \sim O(\varepsilon^2 b^3 / \varepsilon), \quad \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim O(\varepsilon / \varepsilon b^2) \quad (3)$$

Из оценок (3) видно, что в наименее вырожденном случае, когда механизмы конвекции и диссипации равнозначны и:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \sim \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

протяженность возмущенной области « b » по порядку величины равна:

$$b \sim O(\varepsilon^{3/5} / \varepsilon^{3/5}) < 1 \quad (4)$$

Оценки (1), (2) и (3) позволяют для возмущенной вихревой области течения III с характерными размерами:

$$\Delta x \sim O(b) \sim O(\varepsilon / \varepsilon)^{3/5}$$

$$\Delta y \sim \Delta z \sim O(a) \sim O(c) \sim O(\varepsilon^{6/5} / \varepsilon^{1/5})$$

расположенной непосредственно около вогнутой поверхности, ввести следующие переменные и асимптотические разложения функций течения:

$$\begin{aligned} x &= (\varepsilon^{3/5} / \varepsilon^{3/5}) X_3, \\ y &= (\varepsilon^{6/5} / \varepsilon^{1/5}) Y_3, \\ z &= (\varepsilon^{6/5} / \varepsilon^{1/5}) Z_3, \\ u &= (\varepsilon^{1/5} / \varepsilon^{1/5}) u_3 + \dots, \\ v &= \varepsilon^{1/5} \varepsilon^{4/5} v_3 + \dots, \\ w &= \varepsilon^{1/5} \varepsilon^{4/5} w_3 + \dots, \\ \Delta P &= \varepsilon^{2/5} \varepsilon^{8/5} P_3 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

где возмущение давления P отсчитывается от значения на вогнутой поверхности в точке зарождения неустойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности.

Теперь подставим разложения (5) в систему уравнений Навье - Стокса и совершим предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon < \varkappa < 1$. Тогда получим, что в первом приближении для области III справедливы параболизированные в продольном направлении уравнения Навье – Стокса без продольного градиента давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_3}{\partial X_3} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial Y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial Z_3} &= 0 \\ U_3 \frac{\partial U_3}{\partial X_3} + \vartheta_3 \frac{\partial U_3}{\partial Y_3} + w_3 \frac{\partial U_3}{\partial Z_3} &= \frac{\partial^2 U_3}{\partial Y_3^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial Z_3^2} \\ U_3 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial X_3} + \vartheta_3 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial Y_3} + w_3 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial Z_3} + KU_3^2 + \frac{\partial \rho_3}{\partial Y_3} &= \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial Y_3^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial Z_3^2} \\ U_3 \frac{\partial w_3}{\partial X_3} + \vartheta_3 \frac{\partial w_3}{\partial Y_3} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial Z_3} + \frac{\partial \rho_3}{\partial Z_3} &= \frac{\partial^2 w_3}{\partial Y_3^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial Z_3^2} \end{aligned} \quad (6)$$

На вогнутой поверхности должны выполняться обычные условия прилипания и непротекания:

$$U_3 = \vartheta_3 = w_3 = 0, Y_3 = 0 \quad (7)$$

Внешние и начальные краевые условия получаются из сращивания с решением для пристеночной части основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности (с нижней сдвиговой частью пограничного слоя около вогнутой поверхности):

$$\begin{aligned} U_3 \rightarrow AY_3, \rho_3 \rightarrow -KA^2Y_3^3 \\ \vartheta_3, w_3 \rightarrow 0, X_3, Y_3 \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (8)$$

где «А» - напряжение трения в продольном направлении на вогнутой поверхности в точке зарождения неустойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности.

Предполагается исследовать периодические по поперечной координате «Z» - решения, поэтому:

$$f(X_3, Y_3, Z_3) = f(X_3, Y_3, Z_3 + \lambda) \quad (9)$$

$$f = U_3, \vartheta_3, w_3, \rho_3$$

где λ - длина волны вытянутых в продольном направлении стационарных вихрей Гертлера.

Краевая задача (6) – (9) описывает эволюционное нелинейное развитие вихрей Гертлера с длиной волны меньшей толщины пограничного слоя около вогнутой поверхности. Из характеристик основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности в краевую задачу входит только величина «А». Так как протяженность исследуемой области течения мала (как видно из (4)), то здесь несущественно продольное изменение функций течения в основном плоском течении вблизи вогнутой поверхности, которое происходит на характерной длине $X \sim O(1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике. Москва, изд-во Мир, 1967 г.
2. El – Hady N.M., Verma A.K. Instability of compressibly layers along curved walls with suction or cooling. AIAA paper, 1982, №82.
3. Peerhossaini H. On the subject of Gortler vortices. Lecture notes in Physics, 1984, ed. S. Zaleski, pp. 376 – 384.
4. Бийбосунов А.И. Гидродинамическая неустойчивость течения в поле центробежных сил. Материалы международной конференции «Проблемы механики и технологий», г. Бишкек, 1994г.