

## ТЕОРИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ПРОКАТКИ АЛЮМИНИЕВОГО ЛИСТА В ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ

Субботина Е.А.

Кыргызско-Российский Славянский Университет

Рассматривается постановка задачи, включающей анализ поля скоростей деформаций, которые возникают в процессе продольной прокатки полосы из алюминиевых сплавов в режимах сверхпластичности. Решение задачи ищется в предположении радиальности течения металла в очаге деформации.

1. Продольная прокатка. Прокаткой называется [1,2] процесс пластического деформирования тел между вращающимися приводными валками.

Способ продольной прокатки является наиболее распространенным. В этом случае полоса подводится к валкам, вращающимся в разные стороны, и втягивается в зазор между ними. За счет сил трения на контактной поверхности, полоса обжимается по высоте и принимает форму зазора (калибра) между валками. При этом способе прокатки полоса совершает только поступательное движение.

### Кинематика процесса продольной прокатки полосы.

Рассмотрим случай прокатки в валках одинакового радиуса, вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями. (рис.1)

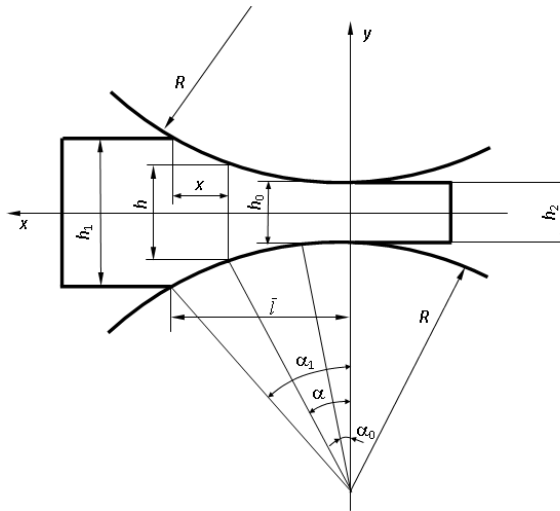


Рис.1 Кинематическая схема

В результате операции полоса толщиной  $h_1$  на входе в валках становится  $h_2$  на выходе из валков. Отношение:

$$\Lambda = \frac{h_1 - h_2}{h_1}, \quad (1.1)$$

называется обжатием полосы

Часть полосы между входом и выходом из валков рассматривается как очаг деформации. Предполагается, что вся деформация полосы происходит в очаге деформации.

Основные параметры деформирования полосы следующие:

- закон изменения толщины полосы в очаге деформации

$$h = h_2 + 2R(1 - \cos \alpha); \quad (1.2)$$

- абсцисса текущей точки на дуге контакта

$$x = R \sin \alpha; \quad (1.3)$$

- длина очага деформации

$$\bar{l} = R \sin \alpha_1; \quad (1.4)$$

- радиус деформированной поверхности валка

$$R = R_0 \left[ 1 + \frac{P_y}{C \Delta h} \right], \quad (1.5)$$

причем

$$C = \frac{\pi E}{16(1 - \mu^2)} \quad (1.6)$$

Здесь  $R$  - радиус деформированной поверхности валка;  $\alpha_1$  - угол захвата полосы между валками ( $\alpha_1 = \max \alpha$ );  $E$  - модуль упругости;  $\mu$  - коэффициент Пуассона материала валков;  $P_y$  - вертикальная проекция действующих на валок сил, приходящихся на единицу ширины полосы;  $\Delta h = h_1 - h_2$  - изменения толщины листа при прокатке.

Полагается, что если ширина полосы  $b$  более, чем в 5 раз превышает диаметр валков, то деформацию вдоль ширины полосы можно принять равной нулю. При этом, воспользовавшись условием несжимаемости материала, получим закономерность изменения средних скоростей перемещений  $v$  в направлении прокатки в виде:

$$v = \frac{v_1 h_1}{h} = \frac{v_2 h_2}{h}, \quad (1.7)$$

где  $v_1, v_2$  - соответственно средние скорости перемещений на входе и выходе из валков,  $h$  - текущая толщина полосы, определяемая углом  $\alpha$ .

Из выражения (1.7) видно, что по мере продвижения в валках средняя скорость  $v$  возрастает. Очевидно, что если на входе средняя скорость перемещения меньше окружной скорости валков, то на выходе из валков указанная скорость больше окружной. Это означает, что на начальном участке контакта полосы и валков силы, действующие на полосу, направлены в сторону движения металла, а на участке, примыкающем к выходу, в сторону обратную движению. Угловую координату точки, в которой силы трения меняют знак, обозначим через  $x_0$ . Сечение, соответствующее этому углу, считается нейтральным, а толщина полосы при этом равняется  $h_0$ . Часть очага деформации от входа в валки до нейтрального сечения называется [1...3]

зоной отставания, а другая часть от нейтрального сечения – зоной опережения.

В соответствии принятому допущению (1.7) рассмотрим двумерную задачу прессования полосы.

2. Постановка задачи. Предполагается, что в процессе прокатки полосы угол захвата валков малый. Это означает, что определения энергосиловых и кинематических параметров технологической операции может быть привлечено проведенное [1,4,5] исследование течения материалов в клиновидном сходящемся канале с углом при вершине  $\alpha^*$  (рис.2). Иными словами, дуга контакта заменяется прямой линией.

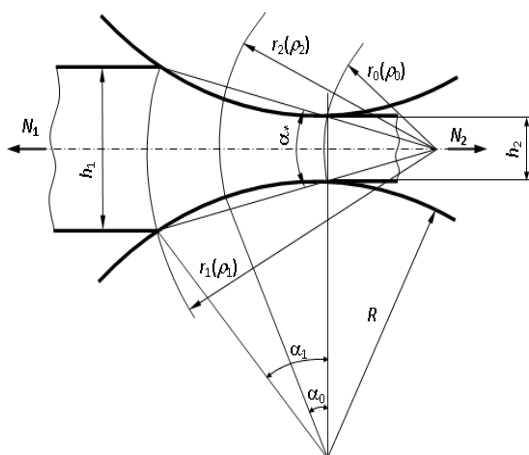


Рис. 2 К постановке задачи

Считается, что процесс прокатки реализуется в изотермических условиях в диапазоне температур, не выходящих за термический интервал сверхпластичности промышленных алюминиевых сплавов [6].

Введем цилиндрическую систему координат  $rxz$ , причем начало координат разместим в вершине клина. Математическая формулировка задачи включает:

– дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\alpha}{\rho} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{\rho\alpha}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{2\tau_{\rho\alpha}}{\rho} = 0; \quad (2.1)$$

– кинематические соотношения

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho}; \quad \dot{\varepsilon}_\alpha = \frac{v_\rho}{\rho}; \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \alpha}; \quad (2.2)$$

– условие несжимаемости в скоростях

$$\dot{\varepsilon}_\rho + \dot{\varepsilon}_\alpha = 0; \quad (2.3)$$

– определяющие соотношения в уравнении теории упругопластических процессов малой кривизны [7]

$$\sigma_\rho - \sigma_0 = \frac{2\sigma_u}{3\dot{\varepsilon}_u} \dot{\varepsilon}_\rho; \quad \sigma_\alpha - \sigma_0 = \frac{2\sigma_u}{3\dot{\varepsilon}_u} \dot{\varepsilon}_\alpha; \quad \tau_{\rho\alpha} = \frac{\sigma_u}{3\dot{\varepsilon}_u} \dot{\gamma}_{\rho\alpha}; \quad 3\sigma_0 = \sigma_\rho + \sigma_\alpha; \quad (2.4)$$

- уравнение состояния [6] в форме зависимости интенсивности напряжений от интенсивности скоростей деформаций

$$\sigma_u = 1 - m_0 - \beta + (3m_0 + \beta)\varepsilon_u - 3m_0\dot{\varepsilon}_u^2 + m_0\dot{\varepsilon}_u^3, \quad (2.5)$$

здесь  $\sigma_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}$  - составляющие тензоров напряжений и скоростей деформаций, отнесенные соответственно к альтернативным внутренним параметрам состояния  $\sigma^*, \dot{\varepsilon}^*$ , вектор скорости радиального перемещения  $v_\rho$ , отнесенный к величине  $\dot{\varepsilon}^* b$ , где  $b$  - ширина полосы, все линейные размеры считаются поделенными на величину  $b$  ( $\rho = r/b; l = \bar{l}/b$ ),  $m_0$  - постоянная материала,  $\beta = \beta(\xi)$ , где  $\xi$  - приведенная температура [6].

Граничные условия будут формулироваться в процессе решения задачи.

3. Определение разрешающей функции. Зависимости (2.2) подставим в условие несжимаемости (2.3). Имеем

$$\frac{\partial v_\rho}{\rho} + \frac{v_\rho}{\rho} = 0. \quad (3.1)$$

Интеграл полученного дифференциального уравнения будет равен

$$v_\rho = \frac{K(\alpha)}{\rho}, \quad (3.2)$$

где  $K(\alpha)$  - неизвестная функция, подлежащая установлению.

Воспользовавшись (3.2), для компонент скоростей деформаций можем записать

$$\dot{\varepsilon}_\rho = -\frac{k(\alpha)}{\rho^2}; \quad \dot{\varepsilon}_\alpha = \frac{k(\alpha)}{\rho^2}; \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = \frac{k'(\alpha)}{\rho^2}. \quad (3.3)$$

Интенсивность скоростей деформаций определяется известной формулой

$$\dot{\varepsilon}_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (\dot{\varepsilon}_\rho - \dot{\varepsilon}_\alpha)^2 + (\dot{\varepsilon}_\alpha - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_\rho)^2 + \frac{3}{2} (\dot{\gamma}_{\rho\alpha}^2 + \dot{\gamma}_{\alpha z}^2 + \dot{\gamma}_{z\rho}^2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

В условиях радиального течения  $\dot{\varepsilon}_z = \dot{\gamma}_{\alpha z} = \dot{\gamma}_{z\rho} = 0$ . Следовательно,

$$\dot{\varepsilon}_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (\dot{\varepsilon}_\rho - \dot{\varepsilon}_\alpha)^2 + \dot{\varepsilon}_\alpha^2 + \dot{\varepsilon}_\rho^2 + \frac{3}{2} \dot{\gamma}_{\rho\alpha}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Поставив (3.3) в (3.5), для интенсивности скоростей деформаций получим

$$\dot{\varepsilon}_u = \frac{1}{\rho^2} L^{\frac{1}{2}}(\alpha), \quad (3.6)$$

где

$$L(\alpha) = \frac{1}{3} [4k^2(\alpha) + k'^2(\alpha)]. \quad (3.7)$$

Определяющие соотношения (2.4) с учетом (3.6), (3.7) примут вид

$$\sigma_\rho - \sigma_0 = -\frac{2}{3} T(\alpha, \rho) k(\alpha); \quad \sigma_\alpha - \sigma_0 = \frac{2}{3} T(\alpha, \rho) k(\alpha); \quad \tau_{\rho\alpha} = \frac{1}{3} T(\alpha, \rho) k'(\alpha), \quad (3.8)$$

причем

$$T(\alpha, \rho) = (1 - m_0 - \beta) L^{\frac{1}{2}}(\alpha) + \frac{3m_0 + \beta}{\rho^2} - \frac{3m_0}{\rho^4} L^{\frac{1}{2}}(\alpha) + \frac{m_0}{\rho^6} L(\alpha). \quad (3.9)$$

Очевидно, что составляющие напряжений, скоростей перемещений и деформаций будут найдены, если установлен явный вид функции  $k(\alpha)$ , которую назовем разрешающей.

Для описания вида функции  $k(\alpha)$  поставим соотношение (3.8) в дифференциальное уравнение (2.1). Имеем

$$3\frac{\partial\sigma_0}{\partial\rho}=2\frac{\partial T}{\partial\rho}k-\frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial\alpha}k'-\frac{1}{\rho}Tk''+\frac{4}{\rho}Tk; \quad 3\frac{\partial\sigma_0}{\partial\alpha}=-\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}k'-2\frac{\partial T}{\partial\alpha}k-4Tk'. \quad (3.10)$$

Продифференцируем первое равенство (3.10) по  $\alpha$ , а второе - по  $\rho$ .

$$3\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial\rho\partial\alpha}=2\frac{\partial^2T}{\partial\rho\partial\alpha}k+2\frac{\partial T}{\partial\rho}k'-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2T}{\partial\alpha^2}k'-\frac{2}{\rho}\frac{\partial T}{\partial\alpha}k''-\frac{1}{\rho}Tk''' +\frac{4}{\rho}\frac{\partial T}{\partial\alpha}k+\frac{4}{\rho}Tk'; \quad (3.11)$$

$$3\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial\rho\partial\alpha}=5\frac{\partial T}{\partial\rho}k'-\rho\frac{\partial^2T}{\partial\rho^2}k'-2\frac{\partial^2T}{\partial\rho\partial\alpha}k-4\frac{\partial T}{\partial\rho}k'.$$

Приравняв друг другу правые части выражений (3.11), получим следующие дифференциальное уравнение:

$$4\frac{\partial^2T}{\partial\rho\partial\alpha}k+7\frac{\partial T}{\partial\rho}k'+\rho\frac{\partial^2T}{\partial\rho^2}k'-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2T}{\partial\alpha^2}k'-\frac{2}{\rho}\frac{\partial T}{\partial\alpha}k''-\frac{1}{\rho}Tk''' +\frac{4}{\rho}\frac{\partial T}{\partial\alpha}k-\frac{4}{\rho}Tk'=0. \quad (3.12)$$

Несложно показать, что уравнение (3.12) удовлетворяется при условии, что разрешающая функция  $k=k(\alpha)$  будет определяться интегрированием однородного дифференциального уравнения

$$k''' + 4k' = 0. \quad (3.13)$$

Решение уравнения (3.13) имеет вид

$$k(\alpha)=\frac{1}{2}c_1\sin 2\alpha-\frac{1}{2}c_2\cos 2\alpha+c_3, \quad (3.14)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  - произвольные постоянные интегрирования.

Одно граничное условие в форме равенства нулю касательного напряжения при  $\alpha=0$  можно записать в форме  $\tau_{\rho\alpha}|_{\alpha=0}=0$ . (3.15)

Это условие равносильно  $k'(0)=0$  (третья формула (3.8) и, естественно, получается, что  $c_0=0$ . С учетом этого будем иметь

$$k(\alpha) = \frac{1}{2} c_1 \sin 2\alpha + c_3. \quad (3.16)$$

Далее полагаем, что контактное усилие равняется действующему касательному напряжению, которое составляет часть максимального касательного напряжения [7].

Иными словами

$$\tau_{\rho\alpha} \bigg|_{\alpha=\frac{\alpha^*}{2}} = -\chi \tau_{\max} \bigg|_{\alpha=\frac{\alpha^*}{2}}, \quad (3.17)$$

где  $\chi$  - коэффициент пропорциональности, устанавливаемый экспериментально, причем знак (-) относится к зоне отставания, а знак (+) к зоне опережения.

Величина  $\tau_{\max}$  определяется известной формулой:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{\rho} - \sigma_{\alpha})^2 + 4\tau_{\rho^2\alpha}}. \quad (3.18)$$

Подставляя в (3.17), (3.18) компоненты напряжений (3.8) при  $\alpha = \frac{\alpha^*}{2}$ , после несложных преобразований получим формулу связи

между постоянными  $c_1$  и  $c_2$  в виде

$$c_3 = \frac{c_1}{2} \psi(\alpha^*, \chi), \quad (3.19)$$

где для  $\psi(\alpha^*, \chi)$  получено выражение

$$\psi(\alpha^*, \chi) = \frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\chi} \cos \alpha^* - \sin \alpha^*. \quad (3.20)$$

С учетом (3.19), (3.20) функция  $k = k(\alpha)$  (3.18) принимает вид

$$k(\alpha) = \frac{c_1}{2} (\sin 2\alpha + \psi). \quad (3.21)$$

Очевидно, что явное выражение для разрешающей функции  $k = k(\alpha)$  будет установлено после определения постоянной  $c_1$ .

#### 4. Анализ поля скоростей перемещений и деформаций.

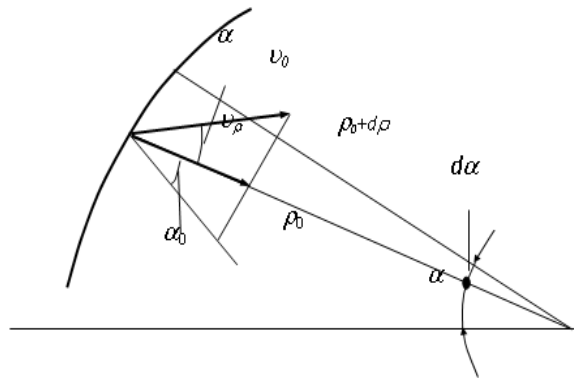


Рис.3 К выводу уравнения поверхности разрыва скоростей перемещений

Считаем [1,8], что очаг деформации представляется в форме клина, ограниченного двумя поверхностями разрыва скоростей  $\rho_1 = \rho_1(\alpha)$ ,  $\rho_2 = \rho_2(\alpha)$  (рис.2). Для определения уравнений указанных поверхностей запишем сначала условия равенства скоростей, нормальных поверхности разрыва слева и справа на входе в валки (рис.3). Имеем

$$v_0 \cos(\alpha + \alpha_\rho) = v_\rho \cos \alpha_\rho, \quad (4.1)$$

причем  $v_0$  будем рассматривать как среднюю скорость перемещения металла на входе в очаг деформации, а  $v_\rho$ , как и выше, скорость радиального перемещения.

Далее, решая (4.1) относительно  $v_\rho$ , получаем:

$$v_\rho = v_0 (\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha_\rho), \quad (4.2)$$

Здесь[5] 
$$\operatorname{tg} \alpha_\rho = -\frac{d\rho_1}{\rho_1 d\alpha}. \quad (4.3)$$

Поскольку для величины  $v_\rho$  записано выражение (3.2), то используя (4.2) и (4.3)

$$\frac{k(\alpha)}{\rho_1} = v_0 \left( \cos \alpha + \sin \alpha \frac{d\rho_1}{\rho_1 d\alpha} \right);$$

или

$$\frac{k(\alpha)}{\rho_1} = v_0 \left( \cos \alpha + \sin \alpha \frac{\rho_1'}{\rho_1} \right). \quad (4.4)$$

После приведения (4.4) к общему знаменателю правую часть выражения (4.4) можно свернуть и переписать так

$$k(\alpha) = v_0 (\rho_1 \sin \alpha)'. \quad (4.5)$$

Интегрируя (4.5), будем иметь

$$\int_0^\alpha k(\alpha) d\alpha = v_0 \rho_1 \sin \alpha. \quad (4.6)$$

Левая часть равенства (4.6) легко вычисляется, если подставить в него (3.24) имеем

$$\frac{c_1}{2} \int_0^\alpha (\sin 2\alpha + \psi) d\alpha = \frac{c_1}{4} (2\psi\alpha - 1 - \cos 2\alpha). \quad (4.7)$$

Приравнявая друг другу (4.6) и (4.7), для функции  $\rho_1 = \rho_1(\alpha)$  получаем

$$\rho_1 = \frac{c_1}{4v_0} \frac{2\psi\alpha - 1 - \cos 2\alpha}{\sin \alpha}. \quad (4.8)$$

Аналогично (4.8), получаем уравнение для поверхности разрыва скоростей на выходе из валков в виде

$$\rho_2 = \frac{c_1(1-\Lambda)}{4v_0} \frac{2\psi\alpha - 1 - \cos 2\alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.9)$$

где  $\Lambda$  - обжатие полосы (1.1), причем уравнение (4.9) получено с привлечением условия несжимаемости.

Вычислим теперь секундный объем, проходящий через поверхность  $\rho_1 = \rho_1(\alpha)$  в очаге деформации

$$W_c = \iint_A v_\rho|_{\rho=\rho_1} dA, \quad (4.10)$$

Здесь  $A$  - площадь поверхности  $\rho_1 = \rho_1(\alpha)$ .

Если учесть, что в цилиндрических координатах элемент площади  $dA = \rho d\alpha dz$ , то для секундного объема, приходящегося на единицу ширины полосы, получим

$$W_c = 2 \int_0^{\alpha^{\frac{x}{2}}} v_\rho \Big|_{\rho=\rho_1} \rho_1 d\alpha. \quad (4.11)$$

Примем во внимание формулу (3.2), которая при  $\rho = \rho_1$  будет иметь вид

$$v_\rho \Big|_{\rho=\rho_1} = \frac{k(\alpha)}{\rho_1}. \quad (4.12)$$

Подставив (4.12) в (4.11), можем записать

$$W_c = 2 \int_0^{\alpha^{\frac{x}{2}}} k(\alpha) d\alpha. \quad (4.13)$$

Определенный интеграл (4.13) будет, используя (4.7), равен

$$W_c = \frac{c_1}{2} (\psi \alpha^* + 1 - \cos \alpha^*). \quad (4.14)$$

Воспользовавшись теперь теоремой о среднем, получим

$$2 \int_0^{\alpha^{\frac{x}{2}}} k(\alpha) d\alpha = v_0 \alpha^*. \quad (4.15)$$

Из сопоставления (4.14) и (4.15) установим величину  $c_1$ , которая будет определяться выражением

$$c_1 = \frac{v_0}{\bar{\psi}}, \quad (4.16)$$

где

$$\bar{\psi} = \frac{\alpha^*}{1 + \psi \alpha^* - \cos \alpha^*}, \quad (4.17)$$

причем для  $\psi = \psi(\alpha^*, \chi)$  имеем выражение (3.23).

Теперь в окончательном выражении можно привести формулы для определения

– разрешающей функции

$$k(\alpha) = \frac{v_0}{\bar{\psi}} (\sin 2\alpha + \psi); \quad (4.18)$$

– скорости радиального перемещения

$$v_\rho = \frac{v_0}{\bar{\psi}\rho} (\sin 2\alpha + \psi); \quad (4.19)$$

– функции  $\rho_1(\alpha)$ ,  $\rho_2(\alpha)$ , ограничивающихся в радиальном направлении очаг пластической деформации

$$\rho_1(\alpha) = \frac{2\psi\alpha - 1 - \cos 2\alpha}{2\bar{\psi} \sin \alpha}; \quad \rho_2(\alpha) = (1 - \Lambda) \frac{2\psi\alpha - 1 - \cos 2\alpha}{2\bar{\psi} \sin \alpha}; \quad (4.20)$$

– скоростей деформаций

$$\dot{\varepsilon}_\rho = -\frac{v_0}{\rho^2 \bar{\psi}} (\sin 2\alpha + \psi); \quad \dot{\varepsilon}_\alpha = \frac{v_0}{\rho^2 \bar{\psi}} (\sin 2\alpha + \psi); \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = \frac{2v_0}{\bar{\psi}} \cos 2\alpha. \quad (4.21)$$

Здесь для  $\psi = \psi(\alpha^*, \chi)$ ,  $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\alpha^*, \bar{\psi})$  соответственно получено (3.23), (4.17).

Автор выражает благодарность проф. Рудаеву Я.И. и доц. Сулаймановой С.М. за оказанную помощь в этой работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малинин Н.Н. Технологические задачи пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1979.-119с.
2. Никитин Г.С. Теория непрерывной продольной прокатки. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2009.-400с.
3. Рудской А.И., Лунев В.А. Теория и технология прокатного производства. – СПб: Наука, 2005. – 540с.

4. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Наука, 1969. –
5. Соколовский В.В. теория пластичности. – М: - Высшая школа, 1969.- 608с.
6. Рудской А.И.. Рудаев Я.И. Механика динамической сверхпластичности алюминиевых сплавов. – СПб.: Наука. – 218с.
7. Кийко И.А. Пластическое течение металлов/ Научные основы прогрессивной техники и технологий. – М.: Машиностроение, 1985. – 105-133с.
8. Рудаев Я.И. Моделирование прессопрокатки листа с использованием сверхпластичности./ Научно-технические ведомости СПО ГПУ. – 2005.- №2. – 57-64с.