

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО УРАВНЕНИЯ СОЛЕПЕРЕНОСА В ВИДЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

Автором работы /1/ при исследовании фильтрации жидкостей через пористую среду в условиях их физико-химического взаимодействия рассмотрено совместно уравнение фильтрации и солепереноса. Математическая модель, составленная им, представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений, которые описывают фильтрацию воды в грунте по закону Дарси и уравнению неразрывности потока, а также уравнение солевого баланса для потока грунтовых вод при наличии всех составляющих вектора скорости фильтрации /1/.

$$u = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = -k \frac{\partial h}{\partial y}, \quad w = -k \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1б)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \gamma \mu (C_0 - C) = m_0 \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (1в)$$

$$\text{где } u_x = -uC + \mu D \frac{\partial C}{\partial x}, \quad u_y = -vC + \mu D \frac{\partial C}{\partial y}, \quad u_z = -wC + \mu D \frac{\partial C}{\partial z},$$

$$h(x,y,z) = \frac{p}{\gamma} + z, \quad k = \frac{k_0 \gamma}{\mu}, \quad \gamma - \text{const растворения } m_0 - \text{пористость грунта,}$$

$x, y, z, t$  – пространственные и временные координаты.

При определенных ограничениях, накладываемых на коэффициенты влаго- и солепереноса, а также допущениях, не противоречащих физике процесса, решение указанной системы уравнений сводится к решению одного уравнения:

$$m_0 \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \text{div}(vC), \quad (2)$$

где  $C(x,y,z,t)$  – концентрация соли в жидкости,  $u, v, w$  – составляющие скорости фильтрации,  $D$  – коэффициент диффузии.

В общем случае миграция солей в почвогрунтах происходит вследствие перемещения их с растворами конвективным и диффузионным способами. Конвективный перенос солей происходит при подаче оросительной воды в почву, инфильтрации осадков, при движении грунтовых вод, изменении их уровня. Коэффициент диффузии  $D$  является функцией от  $C$ , явный вид которого устанавливается эмпирически, в частности в /2/ была установлена экспоненциальная зависимость вида  $D(C) = a \exp bC$ . где  $a, b$  – const, характеризующие свойства почвы и определяемые опытным путем для каждого вида грунта.

Уравнение (2) решается при следующих допущениях: почва считается однородной и изотропной, поэтому компоненты скорости фильтрации постоянны, постоянен и коэффициент диффузии, т.е. уравнение (2) запишется

$$m_0 \frac{\partial C}{\partial t} = D_0 \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] - u_0 \frac{\partial C}{\partial x} - v_0 \frac{\partial C}{\partial y} - w_0 \frac{\partial C}{\partial z}. \quad (3)$$

Для данного уравнения ставятся следующие начально-краевые условия:

а) В начальный момент  $t=t_0$ .  $C(x, y, z, t_0) = P(x, y, z). \quad (4)$

б) На границе  $\Gamma$   $C(x, y, z, t) = Q(x_0, y_0, z_0, t). \quad (5)$

Для решения уравнения (3) поступим следующим образом. Введем новую функцию вида

$$C(x, y, z, t) = \exp \xi \cdot \theta(x, y, z, t), \quad \xi = a_0 x + b_0 y + c_0 z + d_0 t. \quad (6)$$

Определим все необходимые частные производные

$$C_t = d_0 \cdot \exp \xi \cdot \theta + \exp \xi \cdot \theta_t,$$

$$C_x = a_0 \exp \xi \cdot \theta + \exp \xi \cdot \theta_x, \quad C_{xx} = a_0^2 \exp \xi \cdot \theta + 2a_0 \exp \xi \cdot \theta_x + \exp \xi \cdot \theta_{xx}.$$

Аналогично, определяя частные производные по  $y$  и  $z$  и подставляя в рассматриваемое уравнение, получим

$$m_0 \theta_t = D_0 (\theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}) + (2D_0 a_0 - u_0) \theta_x + (2D_0 b_0 - v_0) \theta_y + (2D_0 - w_0) \theta_z + [D_0 (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) - u_0 a_0 - v_0 b_0 - w_0 c_0 - m_0 d_0] \theta.$$

$$\text{Если } a_0 = \frac{u_0}{2D_0}, \quad b_0 = \frac{v_0}{2D_0}, \quad c_0 = \frac{w_0}{2D_0}, \quad d_0 = -\frac{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}{4m_0 D_0}, \quad \tau = \frac{D_0}{m_0} t,$$

то получим следующее линейное уравнение в частных производных второго порядка

$$\theta_\tau = \theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}, \quad (7)$$

которое является основным уравнением наших исследований.

I Пусть оно может иметь решение в форме

$$\theta(x, y, z, \tau) = f_0(\tau) \cdot f_1(\eta), \quad \eta = ax + by + cz. \quad (8)$$

Если найти все частные производные  $\theta_t, \theta_{xx}, \theta_{yy}, \theta_{zz}$  и подставить в уравнение (7), то имеем систему из двух уравнений для определения искомых функций:

$$\text{а. } f_0'(\tau) - \lambda^2 f_0(\tau) = 0. \quad \text{б. } (a^2 + b^2 + c^2) f_1''(\eta) - \lambda^2 f_1(\eta) = 0 \quad (9)$$

Отсюда определяем

$$f_0(\tau) = \exp \lambda^2 \tau, \quad f_1(\eta) = C_1 \exp \alpha_1 \eta + C_2 \exp \alpha_2 \eta \quad (10)$$

где  $\alpha_1 = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \lambda - \text{const.}$

С учетом найденных функций сама функция  $\Theta$  запишется

$$\theta(x,y,z,\tau) = [C_1 \exp(-\frac{\lambda \eta}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}) + C_2 \exp(\frac{\lambda \eta}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}})] \cdot \exp \lambda^2 \tau, \quad (11)$$

а при

$$a^2 = \frac{u_0^2}{6D_0^2}, \quad b^2 = \frac{v_0^2}{6D_0^2}, \quad c^2 = \frac{w_0^2}{6D_0^2}, \quad \lambda = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \tau_1 = \frac{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}{12D_0^2} \tau,$$

$$x_1 = \frac{u_0}{2D_0} x, \quad y_1 = \frac{v_0}{2D_0} y, \quad z_1 = \frac{w_0}{2D_0} z, \quad \xi_1 = x_1 + y_1 + z_1 - \tau_1,$$

имеем следующее решение уравнения (3)

$$C(x,y,z,\tau) = [C_1 \exp(-\eta) + C_2 \exp \eta] \cdot \exp \xi \cdot \exp \lambda^2 \tau. \quad (12)$$

II Другое решение можно найти в форме

$$\theta(x,y,z,\tau) = f_0(\tau) \cdot f(\xi_1), \quad \xi = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 \tau. \quad (13)$$

Определяя все частные производные и подставляя в (7), получим выражение, которое можно записать в виде системы

$$a. \quad f_0'(\tau) - \lambda^2 f_0(\tau) = 0. \quad б. \quad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) f''(\xi_1) - a_4 f'(\xi_1) - \lambda^2 f(\xi_1) = 0. \quad (14)$$

Первое уравнение имеет  $f_0(\tau) = \exp \lambda^2 \tau$  решение, а второе уравнение имеет характеристическое уравнение, корнями которого являются

$$\alpha_{1,2} = \frac{a_4 \pm \sqrt{a_4^2 + 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\lambda^2}}{2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}. \quad (15)$$

В зависимости от дискриминанта D имеем различные решения.

а. Если  $D > 0$ , то имеем

$$f(\xi_1) = C_1 \exp \xi_1 + C_2 \exp(-4\xi_1/3), \quad (16)$$

$$\text{при } a_1 = a_2 = a_3 = -a_4 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -4/3, \quad \xi = x + y + z - \tau, \quad \lambda = \pm 2,$$

а сама искомая функция запишется

$$\theta(x,y,z,\tau) = \left[ C_1 \exp \xi_1 + C_2 \exp(-4\xi_1/3) \right] \exp 4\tau. \quad (17)$$

б) Если  $D=0$ , то имеем

$$f(\xi_1) = c_1 \exp \xi_1 + c_2, \quad (18)$$

при  $a_1=a_2=a_3=1, a_4=\pm 4, a_1=a_2=2/3, \lambda=(4/3)i$ ,

причем искомая функция примет вид

$$\theta(x,y,z,\tau) = [C_1 \exp \xi_1 + C_2] \exp -16\tau/9. \quad (19)$$

в. Если  $D < 0$ , то функция примет вид

$$f(\xi_1) = \left( C_1 \cos \left( \xi_1/2 \right) + C_2 \sin \left( \xi_1/2 \right) \cdot \exp(\xi_1/6) \right), \quad (20)$$

$$\text{при } a_1 = a_2 = a_3 = -a_4 = 1, \quad \alpha_{1,2} = \frac{1}{6} \pm \frac{1}{2}i, \quad \lambda = \sqrt{\frac{5}{6}}i,$$

а искомая функция запишется

$$\theta(x, y, z, \tau) = \exp(-5\xi_1/6) \cdot \exp^{\xi_1/6} \cdot \left[ C_1 \cos\left(\frac{\xi_1}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\xi_1}{2}\right) \right]. \quad (21)$$

Таким образом, функция солепереноса с учетом (6.13) запишется

$$C(x, y, z, t) = \exp \xi \cdot \exp \lambda^2 \tau \cdot f(\xi_1) \quad (22)$$

причем функция  $f(\xi_1)$  имеет вид одного из значений (16, 18, 19).

III Пусть теперь разработаем решение в виде

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, \tau) &= f(\xi_1) [f_0(\tau) + f_1(\eta)], \quad \xi = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 \tau, \\ \eta &= b_1 x + b_2 y + b_3 z. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь также определяя все частные производные и подставляя в уравнение (7), получим

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)f'' - a_4 f' - \frac{a_4^2}{f_0} f &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)f'' + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \times \\ &\times \frac{f_1}{f_1} f' + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \frac{f_1''}{f_1} f - a_4 f' \end{aligned}$$

Последнее выражение можно записать в виде системы двух уравнений, если

$$f(\eta) = \exp k \eta, \quad f_0(\tau) = \exp n \tau \quad (24)$$

$$\text{а. } (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)f'' - a_4 f' - n f = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{б. } (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)f'' + [2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)k - a_4]f' + \\ + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)k^2 f = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Оба эти уравнения идентичны, если  $a_1=a_2=a_3=1$ ,  $b_1=b_2=1$ ,  $b_3=-2$ ,  $n=-6k^2$ , тогда имеем следующее уравнение

$$3f'' - a_4 f' + 6k^2 f = 0, \quad 3\alpha^2 - a_4 \alpha + 6k^2 = 0. \quad (26)$$

Откуда находим  $\alpha_1=-2$ ,  $\alpha_2=-1$ ,  $k=1$ ,  $n=-6$ ,  $a_4=-9$ .

Таким образом,  $f(\xi)$ ,  $f_0(\tau)$  и  $f_1(\eta)$  функции и имеют вид

$$f(\xi_1) = (c_1 \exp(-2\xi_1) + c_2 \exp(-\xi_1)), \quad f_0(\tau) = \exp(-6\tau), \quad f_1(\eta) = \exp \eta, \quad (27)$$

$$\text{где } \xi_1 = x+y+z-9\tau, \quad \eta = x+y-2z.$$

В этом случае, искомая функция окончательно запишется

$$C(x, y, z, \tau) = \exp \xi \cdot [C_1 \exp(-2\xi_1) + C_2 \exp(-\xi_1)] \cdot [\exp(-6\tau) + \exp \eta]. \quad (28)$$

IV Рассмотрим еще одно решение в виде

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, \tau) &= f_0(\tau) f(\xi_1) + f_1(\eta), \quad \xi = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 \tau, \\ \eta &= b_1 x + b_2 y + b_3 z. \end{aligned} \quad (29)$$

В результате подстановки, имеем систему из двух уравнений

$$1. (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)f'' - a_4f' - nf = 0. \quad 2. f_1'' = 0, \text{ где } f_0(\eta) = \exp \eta \tau. \quad (30)$$

Разрешая эти уравнения, получим

$$\theta(x, y, z, \tau) = \exp 4\tau [C_1 \exp(-\frac{4\xi_1}{3}) + C_2 \exp(\xi_1)] + C_3\eta + C_4, \quad (31)$$

где  $f_1(\eta) = C_3\eta + C_4$ ,  $a_4 = -1$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ,  $n = 4$ ,  $\alpha_1 = -\frac{4}{3}$ ,  $\alpha_2 = 1$ .

Тогда искомая функция солепереноса, окончательно запишется

$$C(x, y, z, \tau) = \exp \xi \{ \exp 4\tau [C_1 \exp(-\frac{4\xi_1}{3}) + C_2 \exp(\xi_1)] + C_3\eta + C_4 \}. \quad (32)$$

V. И, наконец, рассмотрим еще одно решение в виде

$$\theta(x, y, z, \tau) = f_0(\tau)f_1(\eta_1) + f(\xi_1)f_2(\eta_2), \quad \eta_1 = b_1x + b_2y + b_3z, \\ \eta_2 = d_1x + d_2y + d_3z, \quad \xi_1 = a_1x + a_2y + a_3z + a_4\tau. \quad (33)$$

В результате подстановки (33) в уравнение (7) получим следующее выражение:

$$f_0'f_1 + a_4f_2f' = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)f_0f_1'' + (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)ff_2'' + \\ + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)f_2f'' + 2(a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3)f_2'f'$$

Запишем последнее выражение в виде

$$-(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)f_0f_1'' + f_0'f_1 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)f_2f'' + \\ + [2(a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3)f_2' - a_4f_1]f' + (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)ff_2'. \quad (34)$$

Зная, что  $f_0(\tau) = \exp \eta \tau$ ,  $f_2(\eta_2) = \exp k\eta_2$ ,

имеем систему из двух уравнений

$$a. (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)f_1'' - nf_1 = 0, \quad (36)$$

$$б. (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)f'' + [2(a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3)k - a_4]f' + \\ + (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)k^2f = 0. \quad (37)$$

Уравнение (36) имеет решение

$$f_1(\eta_1) = C_1 \exp \sqrt{\frac{n}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \eta_1 + C_2 \exp(-\sqrt{\frac{n}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \eta_1). \quad (38)$$

Решение уравнения (37) определяются в зависимости от коэффициентов его характеристического уравнения, т.е. от его дискриминанта.

а. Если  $a_1 = a_2 = a_3 = d_1 = d_2 = 1$ ,  $a_4 = -1$ ,  $k = 1/4$  то  $D = 4 > 0$ ,  $\alpha_1 = -\frac{4}{3}$ ,

$\alpha_2 = -2/3$  то решение уравнения (37) имеет вид

$$f(\xi_1) = C_1 \exp(-\frac{4\xi_1}{3}) + C_2 \exp(-\frac{2\xi_1}{3}). \quad (39)$$

б. При  $k_1 = -1/12$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$ ,  $D = 0$  решение запишется

$$f(\xi_1) = C_1 \exp(-\xi_1) + C_2. \quad (40)$$

в. При  $k=-5/6$ ,  $\alpha_{1,2}=-1\pm i/2$ ,  $D = -9 < 0$  решение примет вид

$$f(\xi_1) = \exp(-\xi_1) [C_1 \cos(\xi_1/2) + C_2 \sin(\xi_1/2)]. \quad (41)$$

С учетом (33, 35, 39, 40, 41) решение уравнения (7) запишется как

$$\theta(x, y, z, \tau) = \exp n \tau \cdot \left[ C_1 \exp \sqrt{\frac{n}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \eta_1 + C_2 \exp \left( - \sqrt{\frac{n}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \eta_1 \right) \right] + \exp k \eta_2 \cdot f(\xi_1), \quad (42)$$

а сама искомая функция окончательно имеет вид

$$C(x, y, z, \tau) = \exp \xi \cdot \{ \exp n \tau \cdot [ C_1 \exp \sqrt{\frac{n}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \eta_1 + C_2 \exp \left( - \sqrt{\frac{n}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \eta_1 \right) ] + \exp k \eta_2 \cdot f(\xi_1) \}. \quad (43)$$

Таким образом, нами разработан класс новых решений трехмерного уравнения солепереноса, записанных в формах плоских волн с различными модификациями. Эти решения полезны при расчетах и прогнозе солевого режима почвогрунтов и грунтовых вод, основанных на принципах геохимической гидродинамики и результатах ее применения в области орошения, нестационарного процесса засоления почвогрунтов под влиянием подъема соленых грунтовых вод, поступления в грунты избыточной поливной воды. Анализ полученных решений даст возможность провести прогноз «засоления - рассоления» почвогрунтов.

### Список литературы

1. Веригин Н.Н. Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники // Известия АН СССР, ОТН.- 1953.- № 10.
2. Gardner W.R. Some study - state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application waporation from awater table. Soilscl. 1938, vol. 85,4 .1 P.228-273.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. - 576 с.