

К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОХИМИЧЕСКОГО РЕЖИМА ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Вопрос об охране и защите подземных вод, в которых проектируются или уже действуют водозаборы для хозяйственно-питьевого водоснабжения, обводнения и орошения земель или других целей от загрязнения, весьма актуален. Основными источниками потенциального загрязнения воды в подземных водозаборах являются: фильтрация воды из ближайших к ним загрязненных рек и водоемов, фильтрация талых и дождевых вод, окисляющих и растворяющих ядохимикаты и удобрения на сельскохозяйственных землях, а также осадки различных аэрозолей, дымов и газов от предприятий и автотранспорта на поверхности почвы; фильтрация токсичных промышленных, сельскохозяйственных стоков из наземных и подземных хранилищ, особенно, если они не имеют достаточно надежных противofiltrационных защит и дренажных устройств. Главный и основной источник загрязнения подземных вод - это приток к водозаборам из загрязненных рек и водоемов. Загрязнение рек и водоемов происходит, в основном, сбросом в них нечищенных или недостаточно очищенных отходов промышленных предприятий и городов, поступлением коллекторно-дренажных вод с сельскохозяйственных полей, содержащих соли, вымываемые из почвогрунтов при промывках и орошении засоленных почв, а также загрязненных талых, дождевых и дренажных вод с сельскохозяйственных земель. Конечно с проведением мероприятий по очистке промышленных стоков и прекращению сбросов их в реки и водоемы загрязнения их будет уменьшаться. Однако сброс солей с засоленных почв, а также продуктов окисления ядохимикатов и удобрений с орошаемых земель будет продолжаться. Также неизбежно и продвижение к водозаборам уже образовавшихся зон загрязнения подземных вод вблизи загрязненных рек и хранилищ промышленных стоков, которые в некоторых районах протягиваются на большие расстояния. Поэтому возникает вопрос о расчете - прогнозе гидрохимического режима действующих и проектируемых водозаборов для предотвращения их загрязнения. Создание мероприятий по защите водозаборов от загрязнения может включать специальный завес из нагнетательных скважин, оттесняющих загрязненные подземные воды от водозаборов или из дренажных скважин, оттягивающих эти воды от водозаборов и очищающих водоносные пласты от ранее образовавшихся очагов загрязнения. В настоящее время из-за сложности расчетов происходящих процессов: диффузии, гидравлической дисперсии, сорбции и десорбции, ионного обмена, растворения и кристаллизации и других методов прогноза гидрохимического режима подземных водозаборов - разработаны недостаточно полно. При прогнозе химического состава воды, извлекаемой из водозаборов, расположенных у водоемов: озер, рек, водохранилищ, загрязняемых постоянно и периодически промышленными и бытовыми сточными водами, можно использовать решения, учитывающие гидродинамическую дисперсию на

границе раздела двух жидкостей. Рассмотрим задачу действия прямолинейного водозабора, расположенного в полуограниченном пласте на расстоянии l_1 от источника (река, водоем, хранилище промышленных стоков) постоянного или периодического загрязнения различными растворенными солями. Дебит водозабора q_0 (погонный) складывается из дебита подземных вод с переменной во времени концентрацией растворенных солей $C(t)$, поступающих со стороны водоема (q_1), и дебита подземных вод с постоянной концентрацией C_e , поступающих со стороны водораздела (q_2). Примем, что в процессе фильтрации промышленных стоков происходит равновесная сорбция загрязнений, содержащихся в подземных водах, причем изотерма сорбции считается линейной (по Генри).

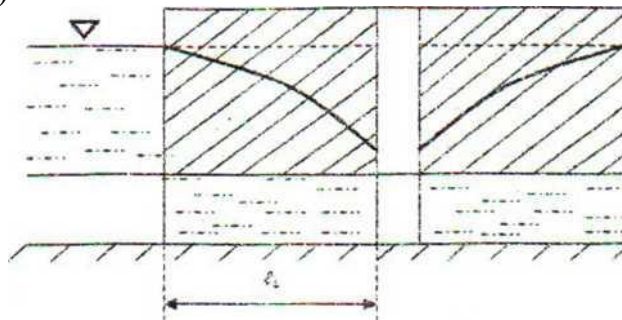


Рис. 1. Схема действия линейного водозабора в полуограниченном пласте

Извлекаемую из водозабора концентрацию растворенных веществ в воде можно определить по формуле смещения растворов (см. рис. 1).

$$C_0(l_1 t) = \frac{q_1 C(l_1, t) + q_2 C_e}{q_0}; \quad q_{1,2} = v_{1,2} \cdot M_1 \quad (1)$$

где v_1, v_2 - скорости фильтрации в зонах 1 ($0 \leq x \leq l_1$) и в зонах 2 ($x > l_1$);

M – мощность водоносного пласта. Нам требуется найти $C(x, t)$, q_1 и q_2 .

Таким образом, загрязнение источника (реки) может произойти после ввода в действие водозабора или до этого. В первом случае требуется определить начало загрязнения водозабора и последующие изменения химического состава воды в нем. Во втором случае определяется расстояние от водозабора до источника загрязнения (реки), при котором концентрация загрязняющих веществ в водозаборе не превысит предельно допустимой величины (П.Д.В). На основании решения дифференциального уравнения конвективной диффузии

$$\lambda v \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x} = m \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (2)$$

можно вычислить концентрацию $C(x, t)$, здесь λ - коэффициент дисперсии, а скорость V определяется из решения конкретной гидродинамической задачи.

В зависимости от гидрохимического режима в водоеме, обусловленного условиями сброса промышленных сточных вод, концентрация на границе (у водоема) может изменяться различным образом. Скачкообразное изменение

(повышение) концентрации в момент времени $t = 0$ от C_1 до величины C_0 с последующим сохранением этой концентрации весь расчетный период $0 \leq t \leq \infty$ будет одним из простейших. Иногда это изменение может быть представлено в виде некоторой периодической функции. Задача существенно упрощается, если в условиях установившегося или квазистационарного режима скорость фильтрации принять за $v = \text{const}$.

I. Для решения уравнения (2) предположим, что оно имеет вид

$$C(x,t) = f_0(t) \cdot f(\xi), \quad \text{где} \quad \xi = x - at. \quad (3)$$

Определяя частные производные и подставляя в исследуемое уравнение

(2), имеем следующее выражение: $v\lambda f_0 f'' - v f_0 f' = m f_0' f - m a f_0 f'$.

Разделяя на $f_0(t) = \exp kt$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение, которого запишется

$$\lambda v f'' + (ma - v) f' - m k f = 0, \quad (4)$$

где корни характеристического уравнения имеют вид

$$\alpha_{1,2} = \left[-(ma - v) \pm \sqrt{(ma - v)^2 + 4\lambda v m k} \right] / 2\lambda v.$$

а. При $D > 0$, $k = \frac{v}{m}$, $a = \frac{\lambda v}{m}$, $\alpha_1 = \frac{1}{\lambda}$, $\alpha_2 = -\frac{mk}{v}$,

имеем решение $C(x,t) = \exp \frac{v}{m} t \cdot \left[c_1 \exp \frac{\xi}{\lambda} + c_2 \exp(-\xi) \right]$, $\xi = x - \frac{\lambda v}{m} t$. (5)

б. При $D = 0$, $k = \frac{v}{4\lambda m}$, $a = \frac{2v}{m}$, $\alpha_{1,2} = \frac{v - ma}{2\lambda m}$,

получим $C(x,t) = \exp \frac{v}{4\lambda m} t \cdot \left[c_1 + c_2 \exp(-\frac{\xi}{2\lambda}) \right]$, $\xi = vx - \frac{2v}{m} t$, (6)

в. При $D < 0$, $k = -\frac{5(ma - v)^2}{4\lambda v m}$, $a = \frac{3}{m}$, $\alpha_{1,2} = -\frac{1}{\lambda} \pm \frac{2}{\lambda} i$, получим

решение

$$C(x,t) = \exp\left(-\frac{5v}{\lambda m} t\right) \cdot \exp\left(-\frac{\xi}{\lambda}\right) \left[c_1 \cos \frac{2\xi}{\lambda} + c_2 \sin \frac{2\xi}{\lambda} \right], \quad \xi = x - \frac{3v}{m} t. \quad (7)$$

II. Для решения уравнения (3) предложим другой метод

$$C(x,t) = f_1(t) \cdot f(\xi), \quad \text{где} \quad \xi = x - at. \quad (8)$$

Здесь, также определяя частные производные и подставляя в (2), получим выражение

$$\lambda v (f_1'' f + 2f_1' f' + f_1 f'') - v (f_1' f + f_1 f') + a m f_1 f' = 0. \quad (9)$$

Разделяя на $f_1(x) = \exp nx$, получим следующее уравнение:

$$\lambda v f'' + (2\lambda v n - v + am) f' + (\lambda v n^2 - v n) f = 0. \quad (10)$$

Его характеристическое уравнение записывается /3/

$$\lambda v \alpha^2 + (2\lambda v n - v + am) \alpha + (\lambda v n^2 - v n) = 0. \quad (11)$$

а. При $D > 0$, $n = 1/\lambda$, $a = v/m$, $\alpha_1 = 2/\lambda$, $\alpha_2 = 0$,

имеем следующее решение

$$C(x, t) = \exp \frac{x}{\lambda} \left[c_1 \exp \frac{2}{\lambda} \xi + c_2 \right], \quad \xi = x - \frac{v}{m} t \quad (12)$$

б. При $D=0$, $n = 1/\lambda$, $a = -v/m$, имеем решение

$$C(x, t) = \exp \frac{x}{\lambda} \cdot \left[c_1 \exp \frac{1}{\lambda} \xi + c_2 \right], \quad \xi = x + \frac{v}{m} t, \quad (13)$$

в. При $D < 0$, $a = v/m$, $n = 1/\lambda$, получим решение в виде

$$C(x, t) = \exp \left(-\frac{x}{\lambda} \right) \cdot \exp \left(-\frac{\xi}{\lambda} \right) \left[c_1 \cos \frac{\xi}{\lambda} + c_2 \sin \frac{\xi}{\lambda} \right], \quad \xi = x - \frac{v}{m} t. \quad (14)$$

Таким образом, здесь получены два вида решения уравнения (2) как (3, 8), а именно в виде плоской волны и обратной плоской волны с модификациями.

III. Рассмотрим еще одно решение записанное в форме

$$c(x, t) = f_0(t) \cdot f(\xi), \quad \text{где} \quad \xi = \frac{ax^2 + bxt + ct^2}{t}. \quad (15)$$

Необходимые частные производные имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_x &= 2axt^{-1} + b, & \xi_t &= -ax^2t^{-2} + c, & c_t &= f_0' f + f_0 f' (-ax^2t^{-2} + c) \\ c_x &= f_0 f' (2axt^{-1} + b), & c_{xx} &= f_0 f'' (4a^2x^2t^{-2} + 4abxt^{-1} + b^2) + 2at^{-1} f_0 f'. \end{aligned}$$

Подставляя их в уравнение (2), получим

$$\begin{aligned} &v\lambda f_0 f'' \frac{(4a^2x^2 + 4abxt + b^2t^2)}{t^2} - v f_0 f' \frac{(2axt + bt^2)}{t^2} - m f_0' f - \\ &- m f_0 f' \frac{(-ax^2 + ct^2)}{t^2} + \frac{2a}{t} f_0 f' \cdot \lambda v = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Последнее выражение запишется в виде обыкновенного дифференциального уравнения, если $f_0(t) = 1/t$, а из соотношений:

$$1. 4a^2\lambda v = -am, \quad 2. 4ab\lambda v = 2av, \quad 3. b^2\lambda v = (bv + cm)$$

$$\text{определяем коэффициенты} \quad a = -\frac{m}{4\lambda v}, \quad b = \frac{1}{2\lambda}, \quad c = -\frac{v}{4\lambda m},$$

в этом случае, выражение (16) запишется в виде вырожденного гипергеометрического уравнения Гаусса /3/

$$\xi f'' + \left[-\frac{m}{2} - \xi \right] f' + mf = 0. \quad (17)$$

Решение этого уравнения имеет вид /3/

$$C(x,t) = \frac{1}{t} [c_1 F(-m, -\frac{m}{2}, \xi) + c_2 \xi^{1+\frac{m}{2}} \cdot F(\frac{2-m}{2}, \frac{4-m}{2}, \xi)]. \quad (18)$$

Это решение табулировано, представлено с помощью ряда, сходящегося при всех значениях ξ . Заметим, что переменная ξ имеет вид

$$\xi = [-\frac{m}{4\lambda v} x^2 + \frac{1}{2\lambda} xt - \frac{v}{4\lambda m} t^2] / t = -\frac{1}{4\lambda v m} \frac{(mx - vt)^2}{t}. \quad (19)$$

Как известно, во многих водоемах: водохранилищах, озерах, прудах, используемых для водоснабжения, орошения и обводнения, может быть загрязнение, засоление воды, вызванное накоплением солей вследствие сброса в водоемы сточных вод и поступления в них минерализованных подземных вод. Рассмотрим определенные режимы водоема, имеющие вытянутую форму и используемые для постоянного и периодического сброса промышленных сточных вод /1/. Считается, что растворенные в водоеме соли равномерно распределяются по всей ширине водоема λ и потому концентрация солей в данном сечении водоема C^* всюду одинакова. Пусть водоем имеет водоносную толщу грунтов мощностью M , и за счет впадающих рек, атмосферных осадков, сброса сточных вод и других источников в водоем наступает массовый расход солей на единицу длины водоема Q_2 , а за счет рек, вытекающих из водоема, испарения с водной поверхности и других факторов из водоема вытекает расход солей Q_1 . А его разность $Q = Q_2 - Q_1$ (г/с.см) будет равна удельному расходу солей, поступающих в водоем ($Q > 0$) или выходящих из него ($Q < 0$) за счет поверхностных вод. Допустим, что водоем питается из напорного водоносного пласта одинаковой мощности или сам подпитывает этот пласт.

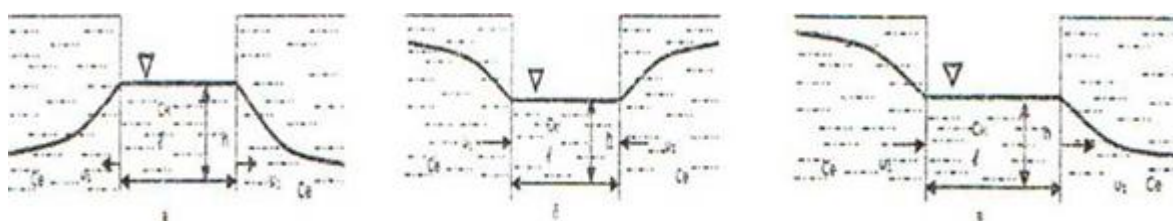


Рис.2. Схема к расчету гидрохимического режима водоемов

Считается, что пласт изолирован от атмосферы и других водоносных горизонтов водупорами, а фильтрация в нем является установившейся и постоянной. Величина $Q_0 = CM(v_1 + v_2)$ равна удельному расходу солей выходящих из водоема или поступающих в него.

Рассматривается случай, когда солевой обмен с подземным стоком Q_0 составляет значительную долю от солевого обмена с поверхностными водами Q ($Q_0 > 0,2Q$). При этом начальная концентрация солей в водоносном пласте на обоих берегах водоема одинакова и равна C_l , а начальная концентрация солей в водоеме C_0 .

Для прогноза солевого состава воды в водоеме рассмотрим одномерную задачу конвективной диффузии и сорбции солей в потоках подземных вод, поступающих в водоем или вытекающих из него. Выделим элемент водоема единичной длины и будем считать, что справа и слева от него имеются полуограниченные потоки подземных вод с постоянными скоростями фильтрации v_1 и v_2 (рис. 2.). Движение веществ, растворенных и эмульгированных в подземной воде, описывается в случае неравновесной сорбции уравнениями [2,4] при $a = 0$:

$$\begin{cases} m_0 \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial(vC)}{\partial x} - \frac{\partial N_1}{\partial t} \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} = -\beta m_0 C \end{cases} \quad (20)$$

Рассмотрим задачу в случае не равновесной сорбции при $a \leq 0$ для водоема, прорезающего неограниченный водоносный пласт,

Начальные условия и условия на внешних границах потока ($x = \pm \infty$) запишем в следующем виде:

$$C_{1,2}(x,0) = C_{1,2}(\pm \infty, t) = C_f = \text{const} \quad (21)$$

Итак, систему уравнений (20-21) запишем в виде [2/

$$m \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial(vC)}{\partial x} + \beta m C, \quad (22)$$

а с введением новых переменных $\tau = \frac{v^2}{Dm} t$, $\bar{x} = \frac{v}{D} x$, $p = \frac{\beta m D}{v^2}$,

исходное уравнение (22) примет вид

$$C_\tau = C_{xx} - C_x - pC. \quad (23)$$

Для решения данного уравнения целесообразно ввести новую функцию

$$C(x,\tau) = \exp \xi \cdot \theta(x,\tau), \quad \text{где } \xi = ax + b\tau, \quad (24)$$

причем определяя $C_\tau = b \exp \xi \cdot \theta + \exp \xi \cdot \theta_\tau$, $C_x = a \exp \xi \cdot \theta + \exp \xi \cdot \theta_x$,

$$C_{xx} = a^2 \exp \xi \cdot \theta + 2a \exp \xi \cdot \theta_x + \exp \xi \cdot \theta_{xx},$$

подставляя в уравнение (23), после некоторых преобразований, имеем

$$\theta_\tau = \theta_{xx}, \quad \text{где } a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{4p-1}{4}, \quad \xi = \frac{2x - (4p-1)\tau}{4}. \quad (25)$$

Решение уравнения (25) будем искать в форме

$$\theta(x,\tau) = f(\eta) + f_0(t) \cdot f_1(x), \quad \eta = x - p\tau. \quad (26)$$

Определяя частные производные, подставляя в уравнение (25), имеем систему из двух уравнений, при этом вынуждены признать, что $f_0(t) = \exp kt$.

$$1. f'' + \eta f' = 0 \quad 2. f_1'' - k f_1 = 0. \quad (27)$$

Эти уравнения имеют решения, соответственно

$$f(\eta) = c_1 \exp(-\eta) + c_2, \quad f_1(x) = c_3 \exp \sqrt{k}x + c_4 \exp(-\sqrt{k}x). \quad (28)$$

Таким образом, новая введенная функция имеет следующий вид:

$$\theta(x, \tau) = c_1 \exp(-n\eta) + c_2 + \exp k\tau \cdot [c_3 \exp \sqrt{kx} + c_4 \exp(-\sqrt{kx})]. \quad (29)$$

А с учетом выражения (24) окончательно имеем

$$C(x, \tau) = \exp \xi \cdot \{c_1 \exp(-n\eta) + c_2 + \exp k\tau [c_3 \exp \sqrt{kx} + c_4 \exp(-\sqrt{kx})]\}. \quad (30)$$

Это решение является более общим, чем в /1,2,4/.

Для решения этой задачи составляется баланс солей в водоеме с учетом их поступления и выхода из водоема вследствие фильтрации, диффузии притока и оттока поверхностных вод и других факторов /1/.

Изменение массы солей на единицу длины водоема за время t , равное P г/см с, можно выразить следующим образом:

$$P = Ml (C_0 - C_*) / t_c, \quad (31)$$

где C_0 – начальная концентрация солей в водоеме при $t=0$, $C_*(t)$ – концентрация после разового сброса сточной воды в момент времени t , l – ширина водоема, t_c – продолжительность сброса. Масса солей, поступающих в водоем ($P < 0$) или выходящих из него ($P > 0$), на единицу длины водоема будет

$$P_s = \int_0^{t_c} P(t) dt. \quad (32)$$

Здесь везде концентрация солей в водоеме $C_* > C_{1,2}$, а индексы 1 и 2 относятся к правой и левой границам водоема. Баланс солей в водоеме с учетом их поступления в водоем и выхода из него вследствие фильтрации, диффузии, а также притока и оттока поверхностных вод выражается таким образом:

I. Когда фильтрационный поток направлен в берега, имеет вид рис. 2, а

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^b C_*(x, t) dx = P - \left[v_2 C_2(-b_1 t) - D_2 \frac{\partial C_2(-b_1 t)}{\partial x} \right] - \\ - \left[v_1 C_1(b_1 t) - D_1 \frac{\partial C_1(b_1 t)}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

II. Когда фильтрационный поток направлен к водоему, то (рис. 2, б)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^b C_*(x, t) dx = P + \left[v_2 C_2(-b_1 t) - D_2 \frac{\partial C_2(-b_1 t)}{\partial x} \right] + \\ + \left[v_1 C_1(b_1 t) - D_1 \frac{\partial C_1(b_1 t)}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

III. Когда с левой границы фильтрационный поток поступает в водоем, а с правой выходит из нее, получим (рис. 2, в)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^b C_*(x, t) dx = P + \left[v_2 C_2(-b_1 t) - D_2 \frac{\partial C_2(-b_1 t)}{\partial x} \right] - \\ - \left[v_1 C_1(b_1 t) - D_1 \frac{\partial C_1(b_1 t)}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

В случае, когда концентрация солей в водоеме не зависит от x и является функцией времени, то выражение в левых частях уравнений (33-35) запишется $\frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^b C_*(x,t) dx = 1 \frac{\partial C_*}{\partial t}$. В грунтовом потоке расход солей $-D \frac{\partial C_*(x,t)}{\partial x} = 0$ – величина конечная. Концентрация солей в водоеме C_* одинакова от точки к точке, то $\partial C_*/\partial t = 0$, и C_* не зависит от x , а поэтому диффузионный расход в водоеме будет конечным при условии $D_* \rightarrow \infty$. Это возможно при наличии в водоеме турбулентных течений и температурной конвекции, которые вызывают весьма быстрое выравнивание концентрации растворенных веществ.

Список литературы

1. Samuelson O. От dynamiska jamviktslaget vidfilterav, jonntbytande amnev. vensk. kem. tidskr. v.53, №11, 1941
 2. Веригин Н.Н., Саркисян В.С. О прогнозе качества воды в береговых водозаборах // Водные ресурсы. - 1975. - № I.
 3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
 4. Капранов Ю.И. О некоторых точных решениях в задачах рассоления грунтов // Изв. АН. СССР, МЖГ. - 1972. - № 1.
- Шестаков В.М. К теории фильтрации растворов в грунтах // Вопросы формирования химического состава подземных вод. - М: Изд-во МГУ, 1963.