

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА СОЛЕВОГО РЕЖИМА ПОЧВОГРУНТОВ.

В настоящее время мелиорация (промывка) засоленных почвогрунтов занимает одно из важных мест в орошении засоленных или подверженных засолению земель. Естественно при проведении мелиорации встречаются чаще всего связные почвогрунты: суглинки, супеси, глины и другие, которые сильно неоднородны в фильтрационном отношении. Здесь наряду с проточными порами – макропоры, которые являются основными проводниками солей при промывках, в таких грунтах большой объем порового пространства занимают менее активные в гидродинамическом отношении зоны: микропоры и тупиково – застойные зоны, несущие в себе значительный запас солей. Между этими двумя системами происходит постоянный солеобмен в основном через молекулярную диффузию и ионный обмен.

Понятно, что из проточных пор грунта соли вымываются промывной водой сравнительно быстро и легко. Соли же тупиково – застойных зон и соли, сорбированные скелетом грунта, удаляются медленно, попадая в фильтрующийся поток за счет молекулярной диффузии. Опытные промывки мелко земных почвогрунтов показывают, в начале промывки идет интенсивный вынос солей, причем концентрация фильтрата на выходе высокая, в дальнейшем вынос солей резко замедляется. Это свидетельствует об исчерпании запасов солей в проточном поровом объеме грунта и о вступлении в опреснение тупиково – застойных зон. Удаление же солей из них связано с затратой значительных количеств промывных вод.

Значительный учет неоднородностей пористой среды и сорбционных процессов позволяет получить основные закономерности перераспределения солей в почвогрунтах, близкие к реальным, но чрезвычайно усложняет механико – математическое описание миграции солей. Поэтому представляет важность получение достаточно простых решений, пригодных для практического использования.

В наше время уже получены ряд решений одномерных математических моделей движения воды и солей в почвогрунтах, учитывающие с некоторыми приближениями, допущениями реальные условия мелиорации засоленных земель.

Внедрение численных решений в мелиоративные задачи, позволяют сводиться от ряда упрощений и допущений, принимаемых при аналитическом решении задач. Создаются возможности полнее учесть природные условия и влияние отдельных членов дифференциальных уравнений в частных производных и начально – краевых условий на процесс переноса солей в грунтах. Описываются не только способом получения количественных характеристик, но и методом установления закономерности изучаемого процесса.

Рассмотрим уравнение выражающее баланс солей в элементарном объеме среды и уравнение кинетики обмена:

$$m \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\beta(\alpha N - mC), \quad (0 \leq x \leq L) \quad (2)$$

при следующих начально – краевых условиях:

$$C(x, 0) = C_0(x), \quad N(x, 0) = N_0 \quad (3)$$

$$[C(0, t) - C_n]V = D \frac{\partial C(0, t)}{\partial x}; \quad \frac{\partial C(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

где обозначено: $C(x, t)$, C_0 , C_n – соответственно концентрации солей в подвижной фазе в точке с координатой x в момент времени t , в начальный момент самой промывной воды, г/л; N – весовое количество солей в неподвижной фазе (находящихся в тупиково – застойных зонах грунта и сорбированных почвенными частицами), отнесенное к единице объема грунта, кг/м³; D – коэффициент дисперсии раствора, м²/сут, ($D = D_m + \lambda V$), где D_m – коэффициент молекулярной диффузии; λ – параметр дисперсии (рассеивания); V – скорость фильтрации, м/сут; L – мощность покровной толщи, м; m – пористость (в долях объема грунта); β – коэффициент скорости обмена между раствором проточных пор и остальной средой, $\frac{1}{\text{сут}}$; α – коэффициент распределения; ось x направлена вертикально вниз, начало выбрано на поверхности почвы.

Первое условие (4) выражает баланс солей во входном сечении потока. Второе условие пренебрежение обратным диффузионным переносом солей в пласт, которое ставится на выходном сечении потока ($x=L$) при истечении фильтрата в атмосферу или в хорошо проницаемый слой (дренаж) и на бесконечном удалении ($L \rightarrow \infty$) в случае полуограниченной толщи.

Рассматривается процесс переноса солей с момента насыщения зоны аэрации промывной водой, считая, что к этому времени все легкорастворимые соли уже растворились. И еще считаем, что все параметры α , β , D – известные опытные величины и переходя к безразмерным величинам вместо (1-4) имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{D(\tau)}{LV_0} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x'^2} - \frac{V(\tau)}{V_0} \frac{\partial \theta}{\partial x'} - \frac{x_2}{\alpha} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \tau}, \quad (1')$$

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial \tau} = \frac{B(C_{00} - C_n)}{N_{00}} (x_2 \bar{N} - x_1 - \theta) \quad (2')$$

$$\theta_0(x', 0) = \frac{C(x', 0) - C_n}{C_{00} - C_n}, \quad \bar{N}(x', 0) = \frac{N_0(x')}{N_{00}} \quad (3')$$

$$\theta(0, \tau) = \frac{D(\tau)}{LV(\tau)} \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial x'} = 0 \quad (4')$$

где введены безразмерные величины:

$$\theta = \frac{C - C_n}{C_{00} - C_n}, \quad \bar{N} = \frac{N(x', \tau)}{N_{00}}, \quad x' = \frac{x}{L}, \quad B = \frac{B \ln^2}{V_0}, \quad \tau = \frac{V_0 t}{nL},$$

$$n x_1 = \frac{C - C_n}{C_{00} - C_n}, \quad x_2 = \frac{L N_{00}}{C_{00} - C_n};$$

C_{00} , N_{00} , V_0 – характерные величины в данной задаче и могут иметь максимальные значения соответственно величин $C(x,0)$, $N(x,0)$, $V(t)$.

Данная задача решена численно при расчете изменения солевого режима в покровной зоне – толще, при следующих данных:

$D=0,025 \text{ м}^2/\text{сут}$; $V=V_0=0,02 \text{ м/сут}$; $L=10 \text{ м}$; $C_{00}=C_0=100 \text{ г/л}$; $C_n=1 \text{ г/л}$; $n=0,25$; $P_e=\frac{VL}{D}=8$ для каждого из 10 значений B : 0; 0,0078; 0,078; 0,78; 3,12; 7,8; 15,6; 78; 780; 7800 1/сут при трех значениях α : 0,5; 1; и 5.

Здесь предполагалось, что в начале полива – промывки в толще было равновесное состояние солей обеих фаз, то есть выполнялось условие $\alpha N_0 = n C_0$, где N_0 – общее количество солей как сорбированных скелетом грунта, так и находящихся в тупиково – застойных зонах.

На рис.1. показаны кривые распределения θ и $\bar{N}$ по толще грунта для момента $t=10 \text{ сут.}$ после начало полива при пяти значениях B : 0,0078; 0,078; 0,78; 7,8; 78,0. 1/сут. При $B>7,8$ изменения θ и $\bar{N}$ незначительны по сравнению со случаем $B=7,8$.

Анализ решений показал, что при критерии обмена $B=\frac{\beta L n^2}{v} \geq 7,8$, вскоре значения θ и $\bar{N}$ мало отличаются друг от друга ($\theta \approx \bar{N}$), то есть в почвогрунте устанавливается равновесный солевой режим обмена, характеризуемый изотермой обмена $N\alpha = nC$. В этом случае, влиянием кинетики обмена можно пренебречь и задача сводится к решению одного уравнения конвективной диффузии:

$$m_3 \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (0 \leq x \leq L) \quad (5)$$

для некоторой сглаженной однородной и не сорбирующей среды с эффективной пористостью $m_3 = \frac{\alpha+1}{\alpha}n$. Присутствие эффективной пористости приводит к замедлению и растягивания процесса перераспределения концентрации солей в толще, она в данном случае учитывает влияние десорбции и вынос солей из тупиково – застойных зон грунта.

Были проведены расчеты решения уравнения (5) при $n_3=0,75; 0,5; 0,3$, при значениях $\alpha = 0,5; 1; 5$. Найденные значения с большой точностью (до 1-4%) совпадают с соответствующими значениями концентраций, полученными ранее из решения (1-2) для $B \geq 7,8$.

Решения уравнения (5) могут быть получены при различных начальных и граничных условиях. Они будут давать разные закономерности изменения искомой функции C от x и t .

Математическая постановка задачи должна быть по возможности более менее соответствовать физической картине изучаемого процесса. Для практических расчетов солевого режима могут быть использованы

приближенные решения, имеющие более простой вид и обладающие достаточной точностью.

Наиболее простые решения конвективной диффузии (5) получаются для полугораниченной толщи грунта при краевых условиях I-го или III-го рода на поверхности почвы

$$C(0,t) = C_n \text{ или } C(0,t) - C_n = \frac{D}{V} \frac{\partial C(0,t)}{\partial x} \quad (6)$$

и I-го и II-го рода на бесконечности

$$C(\infty,t) = C_0 \text{ или } \frac{\partial C(\infty,t)}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

Если уравнение (5) ввести новые независимые переменные в виде

$$\tau \Rightarrow \frac{V^2}{Dm_3} t, \quad x \Rightarrow \frac{V}{D} x, \quad \text{то получим} \quad C_\tau = C_{xx} - C_x \quad (8)$$

I. Если решение уравнения (8) искать в форме

$$C(x, \tau) = f(\xi), \quad \text{где } \xi = ax - b\tau - \text{плоская волна,} \quad (9)$$

то получим решение в общем виде

$$C(x, \tau) = C_1 \exp \alpha_1 \xi + C_2, \quad \alpha_1 = (a + b)/a^2 \quad (10)$$

II. Предположим, что решение имеет форму

$$C(x, \tau) = f(\eta), \quad \text{где } \eta = \frac{ax + b\tau}{\tau^{1/2}} \quad (11)$$

Тогда определяя все необходимые частные производные и подставляя в (8), имеем следующее уравнение

$$2a^2 f'' + \eta f' = 0, \quad a = -b = \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{x - \tau}{2\tau^{1/2}} \quad (12)$$

Дважды интегрируя, получим интеграл ошибок

$$f(\eta) = C_1 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + C_2 = C_2 + C_3 \Phi(\eta) = C_2 + C_3 \operatorname{erf} \eta, \quad C_3 = \sqrt{\pi} C_1,$$

где $\operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta$ - интеграл ошибок, $\operatorname{erfc} \eta = 1 - \operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty e^{-\eta^2} d\eta$ - дополнительная функция ошибок.

Найдем постоянные интегрирования следующим путем.

При $\tau = 0$, $\eta \rightarrow \infty$ т.е. $C_2 + C_3 = C_n$, при $x=0$, $\eta \rightarrow 0$ т.е. $C_2 = C_0$. Отсюда, из этой системы находим, $C_3 = C_n - C_0$, $C_2 = C_0$.

$$C(x, \tau) = C_0 + (C_n - C_0) \operatorname{erf} \eta = C_0 + (C_n - C_0) \Phi(\eta)$$

Таким образом, решена начально – краевая задача и определены постоянные интегрирования.

III. Пусть решение уравнения (8) имеет форму

$$C(x, \tau) = f_0(\tau) f(\eta), \quad \text{где } \eta = \frac{ax + b\tau}{\tau^{1/2}} \quad (14)$$

Здесь, также определяя все необходимые частные производные и подставляя их в искомое уравнение (8)

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{ax + b\tau}{\tau^{3/2}} \right) f' f_0 = \frac{a^2}{\tau} f_0 f'' - \frac{a}{\tau^{1/2}} f_0 f' - f_0' f$$

Последнее выражение становится обыкновенным дифференциальным уравнением, если $f_0(\tau) = \tau^{1/2}$ и $b=a$.

$$2a^2 f'' + \eta f' + f = 0 \quad k=1/2a^2, \quad f'' + k\eta f' + kf = 0 \quad (15)$$

его решением будет [k]

$$f(\eta) = \tau^{-1/2} \exp(-\eta^2/4a^2) F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\eta^2}{4a^2}\right) \quad (16)$$

а с учетом (14) функция $C(x, t)$ примет вид

$$C(x, \tau) = \frac{1}{(a\tau)^{1/2}} \left(\frac{\tau^{1/2}}{x-\tau}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{4a^2} \left(\frac{\tau^{1/2}}{x-\tau}\right)\right) F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{(x-\tau)^2}{\tau}\right) \quad (17)$$

Это решение также является новым аналитическим решением уравнения (8) и оно пригодна для расчета солевого режима для полугораниченной толщи грунта.

IV. Следующее решения уравнения (8) можно найти в форме

$$C(x, \tau) = f_1(\eta_1) + f_0(\tau)f_2(\eta_2), \quad \text{где } \eta_{1,2} = \frac{a(x \mp \tau)}{\tau^{1/2}} \quad (18)$$

Определяя все необходимые частные производные независимых переменных и искомых функций

$$\eta_{1,2x} = a\tau^{-1/2}, \quad \eta_{1,2\tau} = -\frac{1}{2}ax\tau^{-3/2} \mp \frac{1}{2}a\tau^{-1/2}, \quad C_x = a\tau^{-1/2}f'_1 + f'_0f'_2 a\tau^{-1/2},$$

$$C_{xx} = a^2\tau^{-1}f''_1 + f_0f''_2 a^2\tau^{-1}, \quad C_\tau = \left(-\frac{1}{2}ax\tau^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}a\tau^{-\frac{1}{2}}\right)f'_1 + f'_0f'_2 + \left(-\frac{1}{2}ax\tau^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a\tau^{-1/2}\right)f_0f'_2$$

и подставляя в уравнение (8) получим следующее выражение

$$-\frac{1}{2}f'_1 \left(\frac{ax(a-2a)\tau}{\tau^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{1}{2}f \left(\frac{ax(a-2a)\tau}{\tau^{\frac{3}{2}}}\right)f_2 = \frac{a^2}{\tau}f''_1 + \frac{a^2}{\tau}f_0f''_2 - f'_0f'_2$$

или систему из двух дифференциальных уравнений при $f_0(\tau) = 1/\tau$

$$1. \quad 2a^2 f''_1 + \eta_1 f'_1 = 0. \quad 2. \quad 2a^2 f''_2 + \eta_2 f'_2 + f_2 = 0 \quad (19)$$

Выше указано решение каждого уравнения, поэтому запишем его общее решение

$$C(x, \tau) = C_2 + C_3 \Phi(\eta_1) + C_4 \sqrt{\frac{2}{\tau(x+\tau)}} \exp\left(-\frac{2\tau^{1/2}}{x+\tau}\right) F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{(x+\tau)^2}{\tau}\right) \quad (20)$$

$$\text{где } \Phi(\eta_1) = \text{erf}\eta_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta, \quad \text{erf}C\eta_1 = 1 - \text{erf}\eta_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta_1}^\infty e^{-u^2} du \quad (21)$$

$$\text{erf}(-\eta_1) = -\text{erf}\eta_1, \quad \text{erf}C(-\eta_1) = 1 + \text{erf}\eta_1 = 2 - \text{erf}C\eta_1 \quad (22)$$

Функция $\text{erf}\eta_1$ разлагается в ряд

$$\text{erf}\eta_1 \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\eta_1 - \frac{\eta_1^3}{1 \cdot 3} + \frac{\eta_1^5}{2! \cdot 5} - \frac{\eta_1^7}{3! \cdot 7} + \dots \right),$$

При больших значениях аргумента η_1 для дополнительной функции ошибок $\text{erf}\eta_1$ справедлива следующее асимптотическое ее представление

$$\operatorname{erf}\eta_1 \sim \frac{e^{-\eta_1^2}}{\sqrt{\pi}\eta_1} \left(1 - \frac{1}{2\eta_1^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2\eta_1^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2\eta_1^2)^3} + \dots \right) \quad (23)$$

Причем для них верно следующие соотношения: $\int_0^\infty e^{-\eta_1^2} d\eta_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

$$\operatorname{erf} 0=0, \quad \operatorname{erf} \infty=1, \quad \operatorname{erfc} 0=1, \quad \operatorname{erfc} \infty=0 \quad (24)$$

Полученное общее решение (20) является новым и оно также пригодно для расчета солевого режима в почвогрунте.

V. Наиболее интересное решение для уравнения (8) имеет вид

$$C(x, \tau) = f_1(\eta_1) + f_3(x) \cdot f_2(\eta_2) \quad \text{где } \eta_{1,2} = \frac{ax \mp b\tau}{\tau^{1/2}} \quad (25)$$

Находя нужные частные производные и подставляя в (8), получим

$$\frac{a^2}{\tau} f_1'' + \frac{1}{2} \left(\frac{ax - (b+2a)\tau}{\tau^{3/2}} \right) f_1' = \frac{a^2}{\tau} f_3 f_2'' + \frac{1}{2} f_3 \left(\frac{ax + (b-2a+4na)\tau}{\tau^{3/2}} \right) f_2' + (f_3'' - f_3') f_2 = 0$$

Отсюда имеем систему из двух уравнений

$$1. 2a^2 f_1'' + \eta_1 f_1' = 0. \quad 2. \frac{2a^2}{\tau} f_2'' + \frac{\eta}{\tau} f_2' + (n^2 - n) f_2 = 0, \quad f_3(x) = \exp nx \quad (26)$$

из которых находим искомые функции

$$f_1(\eta_1) = C_1 + C_2 \Phi(\eta_1), \quad f_2(\eta_2) = C_3 + C_4 \Phi(\eta_2), \quad f_3(x) = \exp nx \quad (27)$$

Таким образом, общее решение уравнения (8) с учетом (25), имеет вид

$$C(x, \tau) = C_1 + C_2 \Phi(\eta_1) + \exp nx [C_3 + C_4 \Phi(\eta_2)] \quad (28)$$

и она подчиняется условиям первого рода.

Из полученных решений можно сделать заключение, что при достаточно длительных орошениях или промывках расчет солевого режима можно вести из ходя из этих решений. Расчеты показывают, что при больших значениях Пекле $Pe = \frac{VL}{D}$ и разных значениях $\tau = \frac{Vt}{mL}$, определяют расчет динамики перераспределения солей в толще грунта при конкретных условиях и с помощью решений () и (28). А фильтрационный поток в почвогрунтах главный фактор в перераспределении солей в их тольше, причем скорость фильтрации обычно изменяется как по времени так и по протяженности грунта.

Список литературы

- 1.Аверьянов С.Ф. Некоторые вопросы предупреждения засоления орошаемых земель и меры борьбы с ним в европейской части СССР. –В сб.: Орошаемое земледелие в европейской части СССР. «Колос», 1965.
- 2.Веригин Н.Н., Шержуков Б.С., Шапинская Г.П. К расчету промывания засоленных почв. – Труды координационных совещаний по гидротехнике., вып. 35. Л.,1967.
- 3.Дворкин Л.Б. Конвективная диффузия солей в пористых средах с учетом влияния «тупиковых» пор. – физическая химия, т.42.№4,1968.