

ТРАНСЗВУКОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТРЕХМЕРНОГО КРЫЛА

В данной работе рассматриваются методы малых возмущений, которые можно использовать для получения приближенных уравнений, справедливых в трансзвуковой области. Методы разложений основаны, прежде всего, на том факте, что характерная относительная толщина, или угол наклона вектора скорости — очень малая величина. В линейной теории, которая несправедлива в трансзвуковой области, считается, что число Маха невозмущенного потока M_∞ фиксировано при $\delta \rightarrow 0$. Чтобы получить приближение, справедливое в трансзвуковой области, нужно рассмотреть предельный переход $\delta \rightarrow 0, M_\infty \rightarrow 1$.

Рассмотрим систему уравнений для потенциала скорости $\phi(x, y, z)$

$$(a^2 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (a^2 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} + (a^2 - \varphi_z^2)\varphi_{zz} - 2\varphi_x\varphi_z\varphi_{xz} - 2\varphi_y\varphi_z\varphi_{yz} = 0, \\ -\frac{a^2}{\chi-1} = \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) - \frac{1}{2}u^2 - \frac{a_\infty}{\chi-1}, \quad \chi = \frac{C_p}{C_v}. \quad (1)$$

Эта система является точной для дозвуковых и для безударных течений. Ее также можно взять за основу при построении теории трансзвуковых течений со скачками уплотнения.

Поскольку потенциал найден $\phi(x, y, z)$, можно определить и вектор скорости q , скорость звука, давление P и плотность ρ потока газа.

Основным уравнением для этого служит уравнение неразрывности, записанное в дивергентной форме:

$$\nabla \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} q \right) = 0, \quad \nabla \left(\left(\frac{a}{a_\infty} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \nabla \phi \right) = 0. \quad (2)$$

Задача обтекания трехмерного крыла формулируется следующим образом.

Выберем длину хорды крыла, равную 1 относительную толщины δ и представим верхнюю и нижнюю поверхности, лежащие вблизи плоскости $y=0$ семейством функций

$$S(x, y, z) = y - \delta F_{u,l} \left(x, \frac{z}{b} \right)$$

при $0 < x < 1$, b — полуширина.

Граничные условия будут следующими:

1. равномерное течение на бесконечности вдоль плоскости xu .

$$\phi = Ux \quad \text{или} \quad (\varphi_x \rightarrow U, \varphi_y \rightarrow 0, \varphi_z \rightarrow 0) \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty; \quad (3)$$

2. условие непротекания в каждой точке поверхности

$$\frac{\varphi_y(x, \delta F_{u,t}(x))}{\varphi_x(x, \delta F_{u,t}(x))} = \delta F'_{u,t}(x); \quad (4)$$

3. условие Кутта-Жуковского. Пусть проекции передней и задней кромок крыла на плоскость $y=0$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= x_{п.к.} \left(\frac{z}{b} \right) = x_{п.к.} \left(\frac{\tilde{z}}{B} \right) - \text{передняя кромка,} \\ x &= x_{з.к.} \left(\frac{z}{b} \right) = x_{з.к.} \left(\frac{\tilde{z}}{B} \right) - \text{задняя кромка,} \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tilde{z} = \delta^{1/3} z$, $B = \delta^{1/3} b$

Основное разложение потенциала при трансзвуковой скорости принимает вид

$$\varphi(x, y, z; M_\infty, \delta, b) = U \left\{ x + \delta^{2/3} \bar{\varphi}(x, \tilde{y}, z, k, B) + \dots \right\}. \quad (6)$$

Здесь k — параметр трансзвукового подобия.

Граничное условие непротекания $q \nabla S = 0$ на поверхности $S=0$ берется в форме

$$\varphi_n = \delta \frac{\partial F}{\partial x} \varphi_x + \frac{\delta}{b} \frac{\partial F}{\partial(2)} \varphi_z,$$

при $y = \delta F$ $\partial F / \partial(2)$ означает производную от функции, задающей контур, по ее второму аргументу. В трансзвуковом пределе следует положить $\beta = \delta^{1/3} b$. Фиксировано при $\delta \rightarrow 0, M_\infty \rightarrow 1$.

Условие Кутта-Жуковского приближенно ставится как условие отсутствия разрыва давления на дозвуковой задней кромке:

$$\varphi_x(1, 0+) - \varphi_x(1, 0-) = [\varphi_x] = 0.$$

Условие Кутта-Жуковского должно формулироваться на задней кромке точно так же, как и в двумерном случае; в рамках теории малых возмущений нет произвола в выборе положения задней кромки $x = x_{з.к.}$. Формула для распределения давления имеет тот же вид:

$$[\varphi_x]_{з.к.} = \varphi_x(x_{з.к.}, 0+, \tilde{z}) - \varphi_x(x_{з.к.}, 0-, \tilde{z}) = 0.$$

Сходящая с несущего крыла вихревая пелена простирается вниз по потоку от него; как и в линейной теории, ее с достаточной точностью можно считать лежащей в плоскости $y^- = 0$.

Рассмотрим метод трансзвукового разложения для задач обтекания трехмерного крыла профиля стационарным трансзвуковым потоком газа. Исходным является система уравнений для полного потенциала скорости (1).

Применяя метод малых возмущений, потенциал скорости представим в следующем виде:

$$\varphi(x, y, z) = U \left(x + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \varphi_n(x, \tilde{y}, \tilde{z}) \right). \quad (7)$$

Здесь U — скорость поступательного движения потока газа, ε — малый параметр. Имеет место следующая связь:

$$\varepsilon = \delta^{2/3},$$

где δ — толщина обтекаемого газом тела. Переменные y, z подвергаются нижеследующим растяжениям:

$$\tilde{y} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} y, \quad \tilde{z} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} z.$$

Уравнение Эйлера для потенциала скорости приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_\infty^2}{u^2} + \frac{\chi-1}{2} \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{u^2} - \frac{\varphi_z^2}{u^2} \right) - \frac{\chi+1}{2} \frac{\varphi_x^2}{u^2} \right) \frac{\varphi_{xx}}{u} - 2\varphi_x \varphi_y \frac{\varphi_{xy}}{u^3} + \\ & + \left(\frac{a_\infty^2}{u^2} + \frac{\chi-1}{2} \left(1 - \frac{\varphi_x^2}{u^2} - \frac{\varphi_z^2}{u^2} \right) - \frac{\chi+1}{2} \frac{\varphi_y^2}{u^2} \right) \frac{\varphi_{yy}}{u} + \\ & + \left(\frac{a_\infty^2}{u^2} + \frac{\chi-1}{2} \left(1 - \frac{\varphi_x^2}{u^2} - \frac{\varphi_y^2}{u^2} \right) - \frac{\chi+1}{2} \frac{\varphi_z^2}{u^2} \right) \frac{\varphi_{zz}}{u} - 2\varphi_x \varphi_z \frac{\varphi_{xz}}{u^3} - 2\varphi_y \varphi_z \frac{\varphi_{yz}}{u^3} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее находим все частные производные от потенциала скорости $\varphi(x, y, z)$, подставляем в полученное уравнение (8). В результате группировки членов при одинаковых степенях малого параметра ε , приравнявая далее их к нулю, получаем $(n+1)$ дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Приведем здесь четыре приближения уравнения Эйлера (1), решениями которых являются приближения потенциала скорости возмущения $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и т.д.

$$\begin{aligned} & (k - (\chi+1)\varphi_{0x}\varphi_{0xx} + \varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}}) = 0, \\ & (k - (\chi+1)\varphi_{0x})\varphi_{1xx} - (\chi+1)\varphi_{0xx}\varphi_{1x} + \varphi_{1\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{1\tilde{z}\tilde{z}} = \frac{\chi+1}{2}\varphi_{0x}^2\varphi_{0xx} + \\ & + (\chi-1)\varphi_{0x}\varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0x}\varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}} + 2(\varphi_{0\tilde{z}}\varphi_{0x\tilde{z}} + \varphi_{0\tilde{y}}\varphi_{x\tilde{y}}) - k(\varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}}) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& (k - (\chi + 1)\varphi_{0x})\varphi_{2xx} - (\chi + 1)\varphi_{0xx}\varphi_{2x} + \varphi_{2\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{2\bar{z}\bar{z}} = (\chi + 1)(\varphi_{0x}\varphi_{1x}\varphi_{0xx} + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{1xx}) + \\
& + (\chi - 1)(\varphi_{0x}\varphi_{1\bar{y}\bar{y}} + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{0\bar{y}\bar{y}}) + (\chi - 1)(\varphi_{0x}\varphi_{1\bar{z}\bar{z}} + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{0\bar{z}\bar{z}}) + 2(\varphi_{0\bar{y}}\varphi_{1x\bar{y}} + \\
& + \varphi_{1\bar{y}}\varphi_{0x\bar{y}} + \varphi_{0\bar{y}}\varphi_{0x}\varphi_{0\bar{y}}) + 2(\varphi_{0\bar{z}}\varphi_{1x\bar{z}} + \varphi_{1\bar{z}}\varphi_{0x\bar{z}} + \varphi_{0\bar{z}}\varphi_{0x}\varphi_{0\bar{z}}) + \frac{\chi - 1}{2}(\varphi_{0\bar{y}}^2 + \varphi_{0\bar{z}}^2)\varphi_{0xx} - k(\varphi_{1\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{1\bar{z}\bar{z}}) = 0 \\
& (k - (\chi + 1)\varphi_{0x})\varphi_{3xx} - (\chi + 1)\varphi_{0xx}\varphi_{3x} + \varphi_{3\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{3\bar{z}\bar{z}} = (\chi + 1)(\varphi_{0x}\varphi_{2x} + \frac{1}{2}\varphi_{1x}^2)\varphi_{0xx} + (\varphi_{2x} + \\
& + \varphi_{0x}\varphi_{1x})\varphi_{1xx} + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{2xx} + \frac{(\chi + 1)}{2}(\varphi_{0\bar{y}}^2\varphi_{0\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{0\bar{z}}^2\varphi_{0\bar{z}\bar{z}}) + (\chi - 1)(\varphi_{0x}\varphi_{2\bar{y}\bar{y}} + \\
& + (\chi - 1)(\varphi_{0x}\varphi_{2\bar{z}\bar{z}} + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{1\bar{y}\bar{y}}) + (\varphi_{2x} + \varphi_{0x}\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{0\bar{y}\bar{y}}) + (\chi - 1)(\varphi_{0x}\varphi_{2\bar{z}\bar{z}} + \\
& + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{1\bar{z}\bar{z}}) + (\varphi_{2x} + \varphi_{0x}\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{0\bar{z}\bar{z}}) + 2(\varphi_{0\bar{y}}\varphi_{2x\bar{y}} + \\
& + \varphi_{1\bar{y}}\varphi_{1x\bar{y}} + \varphi_{2\bar{y}}\varphi_{0x\bar{y}} + (\varphi_{0\bar{y}}\varphi_{1x\bar{y}} + \varphi_{1\bar{y}}\varphi_{0x\bar{y}})\varphi_{0x} + \varphi_{0\bar{y}}\varphi_{0x\bar{y}}\varphi_{1x}) + 2(\varphi_{0\bar{z}}\varphi_{2x\bar{z}} + \varphi_{1\bar{z}}\varphi_{1x\bar{z}} + \\
& + \varphi_{2\bar{z}}\varphi_{0x\bar{z}} + (\varphi_{0\bar{z}}\varphi_{1x\bar{z}} + \varphi_{1\bar{z}}\varphi_{0x\bar{z}})\varphi_{0x} + \varphi_{0\bar{z}}\varphi_{0x\bar{z}}\varphi_{1x}) + 2\varphi_{0\bar{y}}\varphi_{0\bar{z}}\varphi_{0\bar{y}\bar{z}} + (\chi - 1)(\frac{1}{2}(\varphi_{0\bar{y}}^2 + \\
& + \varphi_{0\bar{z}}^2)\varphi_{1xx} + (\varphi_{0\bar{y}}\varphi_{1\bar{y}} + \varphi_{0\bar{z}}\varphi_{1\bar{z}})\varphi_{0xx}) - k(\varphi_{1\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{1\bar{z}\bar{z}}) = 0, \\
& \text{Здесь } k = \frac{1 - M_\infty^2}{\delta^2} - \text{параметр трансзвукового подобия.}
\end{aligned}$$

Относительно нулевого приближения потенциала скорости возмущения $\varphi_0(x, y, z)$ получаем нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которое служит основным уравнением при решении задач обтекания тонких тел трансзвуковым потоком газа. Остальные приближения являются линейными дифференциальными уравнениями. Полученные линейные уравнения в частных производных второго порядка и последующие приближения к полному уравнению газовой динамики можно представить в виде рекуррентно определяемых и интегрируемых систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
& (k - (\chi + 1)\varphi_{0x})\varphi_{nxx} - (\chi + 1)\varphi_{0xx}\varphi_{nx} + \varphi_{n\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{n\bar{z}\bar{z}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\chi + 1}{2}\varphi_{ixx}\bar{\varphi}_{n-1-i} + 2\varphi_{ix\bar{y}}\varphi_{(n-1-i)\bar{y}} + \right. \\
& + 2\varphi_{ix\bar{z}}\varphi_{(n-1-i)\bar{z}} + (\chi - 1)(\varphi_{i\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{i\bar{z}\bar{z}})\varphi_{(n-1-i)x} \left. \right] + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\chi + 1}{2} [\varphi_{ixx}(G_{n-2-i} + D_{n-2-i}) + \\
& + \bar{\varphi}_{(n-2-i)}(\varphi_{i\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{i\bar{z}\bar{z}})] + \sum_{i=0}^{n-2} (\chi + 1)\varphi_{(n-1-i)x}\varphi_{(i+1)xx} + 2\sum_{i=0}^{n-2} \varphi_{(n-2-i)x}(\phi_i + \psi_i) + \\
& + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{\chi + 1}{2}(\varphi_{i\bar{y}\bar{y}}G_{n-3-i} + \varphi_{i\bar{z}\bar{z}}D_{n-3-i}) + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{\chi - 1}{2}(\varphi_{i\bar{y}\bar{y}}D_{n-3-i} + \varphi_{i\bar{z}\bar{z}}G_{n-3-i}) + \\
& + 2\sum_{i=0}^{n-3} \varphi_{i\bar{y}\bar{z}}R_{n-3-i} - k(\varphi_{(n-1)\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{(n-1)\bar{z}\bar{z}}). \tag{10}
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения для функций Φ_i, Ψ_i, G_i ($i=1, 2, \dots, m$), которые выражаются через частные производные скорости возмущения и используются при определении выражений, содержащихся в правой части рекуррентной системы

$$\begin{aligned}
\phi_i &= \phi_m = \sum_{k=0}^m \varphi_{k\bar{y}}\varphi_{(m-k)\bar{y}}, \psi_i = \psi_m = \sum_{k=0}^m \varphi_{k\bar{z}}\varphi_{(m-k)\bar{z}}, \bar{\varphi}_m = \frac{1}{m\varphi_{0x}} \sum_{k=1}^m (3k - m)\varphi_{kx}\bar{\varphi}_{m-k}, \\
D_{n-2-i} &= D_m = \frac{1}{m\varphi_{0\bar{z}}} \sum_{k=1}^m (3k - m)\varphi_{k\bar{z}}D_{m-k}, \\
G_{n-2-i} &= G_m = \frac{1}{m\varphi_{0\bar{y}}} \sum_{k=1}^m (3k - m)\varphi_{k\bar{y}}G_{m-k}, R_{n-2-i} = R_m = \sum_{k=0}^m \varphi_{k\bar{y}}\varphi_{(m-k)\bar{z}}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Применяя соотношения (11), запишем выражения для функций $\phi_1, \psi_1, \phi_1, D_1, R_1, G_1$ при значениях $m=1,2,3$:

$$\phi_0 = \varphi_{\alpha\bar{y}}\varphi_{\alpha\bar{y}}, \phi_1 = \varphi_{\alpha\bar{y}}\varphi_{1\bar{y}} + \varphi_{1\bar{y}}\varphi_{\alpha\bar{y}}, \phi_2 = \varphi_{\alpha\bar{y}}\varphi_{2\bar{y}} + \varphi_{1\bar{y}}\varphi_{1\bar{y}} + \varphi_{2\bar{y}}\varphi_{\alpha\bar{y}}, \quad (12)$$

$$\psi_0 = \varphi_{\alpha\bar{z}}\varphi_{\alpha\bar{z}}, \psi_1 = \varphi_{\alpha\bar{z}}\varphi_{1\bar{z}} + \varphi_{1\bar{z}}\varphi_{\alpha\bar{z}}, \psi_2 = \varphi_{\alpha\bar{z}}\varphi_{2\bar{z}} + \varphi_{1\bar{z}}\varphi_{2\bar{z}} + \varphi_{2\bar{z}}\varphi_{\alpha\bar{z}}, \quad (13)$$

$$\bar{\phi}_1 = 2\varphi_{1x}\varphi_{\alpha x}, \bar{\phi}_2 = \varphi_{1x}^2 + 2\varphi_{2x}\varphi_{\alpha x}, \bar{\phi}_3 = 2(\varphi_{1x}\varphi_{2x} + \varphi_{3x}\varphi_{\alpha x}) \quad (14)$$

Положим здесь, что

$$\bar{\phi}_0 = \varphi_{\alpha x}^2, G_1 = 2\varphi_{1\bar{y}}\varphi_{\alpha\bar{y}}, G_2 = \varphi_{1\bar{y}}^2 + 2\varphi_{2\bar{y}}\varphi_{\alpha\bar{y}}, G_3 = 2(\varphi_{1\bar{y}}\varphi_{2\bar{y}} + 2\varphi_{3\bar{y}}\varphi_{\alpha\bar{y}}) \quad (15)$$

Также здесь принято, что $G_0 = \varphi^2 0y^-$. Аналогичным образом определяются величины $D_1, D_2, D_3, D_0, R_0, R_1$ и R_2 .

$$D_1 = 2\varphi_{1\bar{z}}\varphi_{\alpha\bar{z}}, D_2 = \varphi_{1\bar{z}}^2 + 2\varphi_{2\bar{z}}\varphi_{\alpha\bar{z}}, D_3 = 2(\varphi_{1\bar{z}}\varphi_{2\bar{z}} + \varphi_{3\bar{z}}\varphi_{\alpha\bar{z}}), D_0 = \varphi_{\alpha\bar{z}}^2 \quad (16)$$

$$R_0 = \varphi_{\alpha\bar{y}}\varphi_{\alpha\bar{z}}, R_1 = \varphi_{\alpha\bar{y}}\varphi_{1\bar{z}} + \varphi_{1\bar{y}}\varphi_{\alpha\bar{z}}, R_2 = \varphi_{\alpha\bar{y}}\varphi_{2\bar{z}} + \varphi_{1\bar{y}}\varphi_{1\bar{z}} + \varphi_{2\bar{y}}\varphi_{\alpha\bar{z}}.$$

Полезно отметить, что уравнение Кармана-Гудерлея является уравнением сохранения. Следовательно, его можно записать в дивергентной форме, так что оно будет выражать закон сохранения некоторой физической величины.

$$\left(K\varphi_x - \frac{\gamma+1}{2}\varphi_x^2 \right) + (\varphi_{\bar{y}})_{\bar{y}} + (\varphi_{\bar{z}})_{\bar{z}} = 0 \quad (17)$$

Условие сохранения массы на ударной волне снова можно получить путем интегрирования уравнения в дивергентной форме (17) поперек поверхности разрыва. Соответствующий вектор потока массы имеет вид

$$\frac{\rho\bar{q}}{\rho_\infty U} = i \left\{ 1 + \delta^{\frac{4}{3}} \left(K\varphi_x - \frac{\gamma+1}{2}\varphi_x^2 \right) + \dots \right\} + \delta\bar{\nabla}\varphi + \dots, \quad (18)$$

$$\text{где } \bar{\nabla} = i_{\bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} + i_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Закон сохранения массы поперек ударной волны $[q \cdot n] = 0$ представлен уравнением

$$\left[K\varphi_x - \frac{\gamma+1}{2}\varphi_x^2 \right] + [\nabla\tilde{\varphi}] \frac{|\tilde{\nabla}S|}{S_x} = 0, \quad (19)$$

а условие сохранения касательной компоненты скорости $[q] \cdot n = 0$ — уравнением

$$i_x[\varphi_x] * \frac{|\tilde{\nabla}S|}{S_x} + [\nabla\tilde{\varphi}] * i_x = 0. \quad (20)$$

Для заданной геометрии ударной волны (19) и (20) дают три соотношения для возмущений компонент скорости за ударной волной, выраженных через соответствующие величины перед ней. Эквивалентом соотношения (20) служит условие $[\varphi] = 0$.

Список литературы

1. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972.
2. Коул Дж. Трансзвуковая аэродинамика. — М.: Мир, 1978.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — Изд. 6-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
4. Черный Г.Г. Газовая динамика. — М.: Наука, 1988.