

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ

Система уравнений, описывающая движение вязкой реагирующей смеси газов с цилиндрическими волнами в массовых лагранжевых координатах, имеет вид /1-3/:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial q}(xu), \quad v = \frac{1}{\rho}, \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \chi \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^2}{v} \frac{\partial c}{\partial q} \right) - c g, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu x \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q}(xu) \right) - x \frac{\partial p}{\partial q}, \quad p = r \frac{\theta}{v}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\lambda_1(\theta) \frac{x^2}{v} \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\lambda_2(\theta) \frac{x^2}{v} \theta \frac{\partial c}{\partial q} \right) - p \frac{\partial}{\partial q}(xu) + \\ &+ \frac{\mu}{v} \left(\frac{\partial}{\partial q}(xu) \right)^2 - \frac{3\mu}{2} \frac{\partial}{\partial q}(u^2) + \delta c g. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ, v, u, θ, p, c — плотность, удельный объем, скорость, температура смеси, давление и массовая концентрация компонент; χ, μ, r, δ — физические постоянные; $x \in [a; l], a > 0$ — эйлерова координата, $r \in [a; l]$ — лагранжева координата, $q \in [0; b]$ — массовая лагранжева координата, $t \in [0; T], 0 < T < \infty$ — время.

В эйлеровых координатах рассматриваемая область $(x, t) \in \Omega' = \Omega^* (0, T), \Omega' = (a, l), a > 0$ не включает ось симметрии, где уравнения вырождаются. При рассмотрении в массовых лагранжевых координатах область $(q, t) \in Q = \Omega^* (0, T), \Omega = (0, b)$ также не содержит линии вырождения.

Эйлерову координату следует рассматривать как решение задачи Коши

$$\frac{\partial x}{\partial t}(q, t) = u(q, t), \quad x(q, 0) = r(q). \quad (2)$$

Между различными введенными координатами существует связь /1/:

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{v}{x}, \quad q = \int_a^x r \rho_0(r) dr, \quad (3)$$

где $\rho_0(r)$ — начальное распределение плотности.

Функции u_0, θ_0, v_0, c_0 , задающие начальные данные

$$u|_{t=0} = u_0(q), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(q), \quad c|_{t=0} = c_0(q), \quad v|_{t=0} = v_0(q), \quad (4)$$

предполагаются известными, непрерывными,

$$0 < c_0(q) \leq 1, \quad 0 < m_0 \leq (v_0(q), \theta_0(q)) \leq M_0 < \infty.$$

Область Q при этом не изменится, если принять не ограничивающее общности условие:

$$\int_0^b v_0(q) dq = 1. \quad (5)$$

Граничные условия имеют вид:

$$u|_{q=0} = u|_{q=b} = \frac{\partial \theta}{\partial q}|_{q=0} = \frac{\partial \theta}{\partial q}|_{q=b} = \frac{\partial c}{\partial q}|_{q=0} = \frac{\partial c}{\partial q}|_{q=b} = 0. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\lambda 1(\theta) = \lambda 0$, $\lambda 2(\theta) = \theta 1/2$, $\lambda, v = \text{const}$ и начальные данные (4) удовлетворяют условиям $(u_0, v_0, \theta_0, c_0) \in W^{2,1}(0, b)$.

Функция $g(r, c, \theta)$ является положительной и непрерывной в любой компактной области своих аргументов, а по $\theta 1/2$, кроме того, удовлетворяет условию Литишица.

Тогда в области Q с произвольной конечной высотой $T, 0 < T < \infty$ существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), (4), (6) такое, что

$$v(q, t) \in L_{\infty}(0, \Phi; W_2^1(0, b)), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t} \right) \in L_2(Q),$$

$$(u(q, t), \theta(q, t), c(q, t)) \in L_{\infty}(0, \Phi; W_2^1(0, b)) \cap L_2(0, \Phi; W_2^2(0, b)),$$

$0 < c(q, t) \leq 1, v(q, t), \theta(q, t)$ – строго положительные, ограниченные функции.

Доказательство теоремы проведем методом априорных оценок. Выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C_i, N_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения. На основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение /2, 3/ продолжается на весь промежуток времени $[0, T], 0 < T < \infty$.

Примем положительные постоянные $\chi, \mu, v, \gamma, \delta$ равными единице.

Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $v(q, t), \theta(q, t)$ неотрицательны и $0 < c(q, t) \leq 1$.

Непосредственно из уравнения неразрывности системы (1) с учетом граничных условий и (5) вытекает оценка:

$$\int_0^b v(q, t) dq = 1, \quad (7)$$

Умножая третье уравнение системы (1) на u и складывая со вторым и четвертым уравнениями, получим равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 + c + \theta \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{u x}{v} \frac{\partial}{\partial q} (x u) \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(u x \frac{\theta}{v} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^2 \theta}{v} \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^2}{v} \theta^{3/2} \frac{\partial c}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^2}{v} \frac{\partial c}{\partial q} \right) - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial q} (u^2).$$

Интегрируя его по Q с учетом граничных условий, находим закон сохранения:

$$\int_0^b \left(\frac{1}{2} u^2 + c + \theta \right) dq = \int_0^b \left(\frac{1}{2} u_0^2 + c_0 + \theta_0 \right) dq \leq N_1. \quad (8)$$

Умножая второе уравнение системы (1) на c и интегрируя по (q, t) , имеем оценку:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b c^2 dq + \int_0^T \int_0^b \left(\frac{1}{v} \left(\frac{\partial c}{\partial q} \right)^2 + c^2 g \right) dq dt \leq N_2.$$

Из (7) следует, что $\forall t \in [0, T]$ найдется такая точка $z(t) \in [0, b]$, что $v(z(t), t) = 1$. Рассуждая аналогично [4], выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями:

$$v(q, t) = Y^{-1}(t) B^{-1}(q, t) \left[v_0(q) + \int_0^t \theta(q, \tau) Y(\tau) B(q, \tau) d\tau \right], \quad (9)$$

$$\text{где } B(x, t) = \exp \left\{ \int_{z(t)}^q \left[\frac{u_0}{r} - \frac{u}{x} - \int_0^t \frac{u^2}{x^2} d\tau \right] dq \right\}, \quad Y(t) = \exp \left\{ \int_0^t \frac{\theta}{v}(z(t), \tau) d\tau \right\}.$$

Аналогично [4] выводятся неравенства:

$$N_3^{-1} \leq B(q, t) \leq N_3, \quad N_4^{-1} \leq Y(t) \leq N_4, \quad \forall (q, t) \in Q. \quad (10)$$

Пусть $h(q, t)$ — непрерывная функция. Введем обозначения:

$$M_h(t) = \max_{0 \leq q \leq b} h(q, t), \quad m_h(t) = \min_{0 \leq q \leq b} h(q, t).$$

Из (9) и (10) вытекают оценки:

$$m_v(t) \geq N_5. \quad (11)$$

$$M_v(t) \leq C_1 \left[1 + \int_0^t M_\theta(\tau) d\tau \right], \quad \forall t \in [0, T]. \quad (12)$$

Умножением второго уравнения системы (1) на $\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^2}{v} \frac{\partial c}{\partial q} \right)$ и интегрированием по q и по t выводится оценка:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \frac{1}{v} \left(\frac{\partial c}{\partial q} \right)^2 dq + \int_0^T \int_0^b \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^2}{v} \frac{\partial c}{\partial q} \right) \right]^2 dq d\tau \leq N_6. \quad (13)$$

Умножим первое уравнение системы (1) на $(1-v)$, третье на u , четвертое на $(1-\theta)$ и сложим их со вторым уравнением. Получившееся соотношение проинтегрируем по q .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^b \left(\frac{1}{2} u^2 + c + (\theta - \ln \theta) + (v - \ln v) \right) dq + \int_0^b \left[\frac{x^2 u_q^2}{v \theta} + \frac{v u^2}{\theta x^2} + \frac{x^2 \theta_q^2}{v \theta} + \frac{c g}{\theta} \right] dq = \\ = \int_0^b \left[\frac{x^2 \theta_q c_q}{v \theta^{1/2}} + \frac{u u_q}{\theta} \right] dq. \end{aligned}$$

Применим к правой части неравенства Юнга и Коши. После интегрирования по t , с учетом оценки (13) получим оценку:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \left(\frac{1}{2} u^2 + c + (\theta - \ln \theta) + (v - \ln v) \right) dq + \\ + \int_0^T \int_0^b \left[\frac{u_q^2}{v \theta} + \frac{v u^2}{\theta} + \frac{\theta_q^2}{v \theta} + \frac{c g}{\theta} \right] dq d\tau \leq N_7. \quad (14) \end{aligned}$$

Из (14) вытекает оценка

$$\int_0^T \int_0^b \frac{1}{v \theta} \left[\frac{\partial}{\partial q} (x u) \right]^2 dq d\tau \leq N_8.$$

Из (8) следует, что $\forall t \in [0, T]$ найдется такая точка $z_1(t) \in [0, b]$, что $\theta(z_1(t), t) \leq N_1$. Справедливо представление

$$\theta^{1/2}(q, t) = \theta^{1/2}(z_1(t), t) + \frac{1}{2} \int_{z_1(t)}^q \frac{\theta_q}{\theta^{1/2}} dq.$$

Используя неравенство Коши и оценку (7), получим

$$M_\theta(t) \leq C_2 \left(1 + \int_0^b \frac{\theta_q^2}{v\theta} dq \right).$$

Отсюда и из (14) имеем оценку:

$$\int_0^T M_\theta(t) dt \leq N_9. \quad (15)$$

Из (12) с учетом (15) вытекает ограниченность удельного объема сверху

$$M_v(t) \leq N_{10}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (16)$$

Умножим уравнение импульса системы (1) на u и проинтегрируем по Q . После некоторых преобразований [4] находим оценку:

$$\int_0^T \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 dq d\tau \leq N_{11}.$$

Умножим уравнение теплопроводности системы (1) на θ и проинтегрируем по Q . После некоторых преобразований получим оценку:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \theta^2 dq + \int_0^T \int_0^b \left(\frac{\partial \theta}{\partial q} \right)^2 dq d\tau \leq N_{12}. \quad (17)$$

Продифференцируем (9) по q .

$$\frac{\partial v}{\partial q} = v(q, t) \cdot A(q, t) + Y^{-1}(t) B^{-1}(q, t) \left[v'_0(q) + \int_0^t \left(\frac{\partial \theta}{\partial q} + \theta \cdot A \right) Y(\tau) B(q, \tau) d\tau \right],$$

где $A(x, t) = \frac{u_0}{r} - \frac{u}{x} - \int_0^t \frac{u^2}{x^2} d\tau$. Отсюда, используя неравенство Коши и (8), (10), (16),

(17), выводим оценку:

$$\int_0^b \left(\frac{\partial v}{\partial q} \right)^2 dq \leq N_{13}.$$

Умножим уравнение импульса системы (1) на $x \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} (xu) \right)$ и проинтегрируем по Ω . Возникающую при этом производную $\partial v / \partial t$ заменим через уравнение неразрывности системы (1).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial q} (xu) \right)^2 dq + \int_0^b x^2 \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} (xu) \right) \right]^2 dq = \\ & = \int_0^b \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial}{\partial q} (xu) \right)^3 dq + \int_0^b u^2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} (xu) \right) dq - \\ & - \int_0^b x^2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} (xu) \right) \cdot \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \theta}{\partial q} - \frac{\theta}{v^2} \frac{\partial v}{\partial q} \right) dq. \end{aligned}$$

Оценим интегралы в правой части, используя неравенства Гельдера, Коши и Юнга с учетом полученных выше оценок. После применения леммы Гронуолла имеем оценку:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial q} (xu) \right)^2 dq + \int_0^T \int_0^b x^2 \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} (xu) \right) \right]^2 dq d\tau \leq N_{14}.$$

Расписывая производную, приходим к оценке

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 dq + \int_0^T \int_0^b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} \right)^2 dq d\tau \leq N_{15}.$$

Непосредственно из первого и третьего уравнений системы (1) получим:

$$\int_0^T \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dq d\tau \leq N_{16}, \quad \int_0^b \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dq \leq N_{17}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Аналогично /3, 4/ из уравнения теплопроводности системы (1) следует строгая положительность температуры:

$$m_\theta(t) \geq N_{18}, \quad \forall t \in [0, T].$$

В уравнении теплопроводности распишем производную и сгруппируем слагаемые. В итоге получим равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & \frac{x^2}{2v} (\theta^2)_{qq} + (\theta^2)_q - \frac{x^2 v_q}{2v^2} (\theta^2)_q + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x^2 c_q}{v} \right) + \frac{3 (\theta^2)_q}{4 \theta^{1/2}} \frac{x^2 c_q}{v} - \\ & - \frac{\theta}{v} \frac{\partial}{\partial q} (xu) + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial q} (xu) \right)^2 - 3uu_q + cg. \end{aligned}$$

Умножением его на θ $(\theta^2)_{xx}$ и интегрированием по Q выводится оценка:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \left(\frac{\partial \theta}{\partial q} \right)^2 dq + \int_0^T \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right] dq d\tau \leq N_{19}.$$

Отсюда вытекает ограниченность температуры:

$$M_\theta(t) \leq N_{20}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Из оценки (13) и второго уравнения системы (1) имеем:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^b \left(\frac{\partial c}{\partial q} \right)^2 dq + \int_0^T \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 c}{\partial q^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right)^2 \right] dq d\tau \leq N_{21}.$$

Таким образом, получены все оценки, необходимые для доказательства существования обобщенного решения. Единственность доказывается составлением однородного уравнения относительно разности двух совместных решений аналогично /4, 5/.

Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Система квазилинейных уравнений и их применения к газовой динамике. - М.: Наука, 1978. - 667 с.
2. Петров А.Н. Краевые задачи для уравнений одномерного нестационарного течения реагирующей смеси газов // Динамика сплошной среды. ~ 1993. - Вып.107. - С. 112-123.

3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. - Новосибирск: Наука, 1983. -319 с.
4. Николаев В.Б. Глобальная разрешимость уравнений движения вязкого газа с осевой и сферической симметрией // Динамика сплошной среды. - 1983. - Вып. 63. - С. 136-141.
5. Искендерова Д.А. Разрешимость одной модели реагирующей смеси газов // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Тр. Междунар. науч. конф. // Вестн. Кыргызск. гос. нац. ун-та. Сер.3. Естественно-техн. науки. - 2001. - Вып. 6. - С. 217-221.