

ЗАДАЧА С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Уравнения магнитной газовой динамики с учетом пористости среды в массовых лагранжевых координатах имеют вид/1/:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad v = \frac{1}{\rho}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} - \mu_1 H \frac{\partial H}{\partial x} - \beta(x) |u|^6 u, \quad p = k \frac{\theta}{v}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu_1 \mu_H}{v} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial}{\partial t} (vH) &= \mu_H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial H}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь v, u, θ, H, ρ, p – соответственно удельный объем, скорость, абсолютная температура, напряженность магнитного поля, плотность и давление – искомые функции пространственной переменной $x, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ и времени $t, t \in (0, T], 0 < T < \infty$; $\mu, k, \lambda, \mu_1, \mu_H$ – положительные постоянные, которые в дальнейшем, для простоты, будем предполагать равными единице; $\beta(x)$ – коэффициент проницаемости – непрерывная, неотрицательная, ограниченная функция и $\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x) dx \leq C$; $0 \leq \alpha \leq 1$.

В начальный момент $t=0$ все характеристики среды известны:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x), \quad H|_{t=0} = H_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

причем $(\rho^0, u^0, \theta^0, H^0)$ – непрерывные, (ρ^0, θ^0) – ограниченные функции

$$0 < m_0 \leq (\theta_0(x), v_0(x)) \leq M_0 < \infty.$$

Искомые функции удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial x} - p \right|_{x=0} &= \left. \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial x} - p \right|_{x=1} = H|_{x=0} = H|_{x=1} = 0 \\ \theta|_{x=0} &= \chi_0(t), \quad \theta|_{x=1} = \chi_1(t), \\ \chi_i(t) &\in W_2^1(0, T), \quad \chi_i(t) \geq m_0 > 0, \quad \chi_i(0) = \theta_0(i), \quad i = 0, 1. \end{aligned} \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задачи (1)-(3) называется совокупность функций (v, u, θ, H) ,

$$\begin{aligned} v(t) &\in L_\infty(0, T; W_2^1(R)), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(R)) \\ (u(t), \theta(t), H(t)) &\in L_\infty(0, T; W_2^1(R)) \cap L_2(0, T; W_2^2(R)), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) &\in L_2(Q), \quad \Omega = (0, 1), \quad Q = \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

удовлетворяющих уравнениям (1) почти всюду в Q и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

ТЕОРЕМА. Пусть начальные данные (2) обладают следующими свойствами гладкости:

$$(u_0, H_0, \theta_0, v_0) \in W_2^2(R).$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3) «в целом» по времени, причем $v(x,t), \theta(x,t)$ – строго положительные, ограниченные функции.

Доказательство теоремы проведем методом априорных оценок. Выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C, C_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения. На основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение /2, 3/ продолжается на весь промежуток времени $[0, T], 0 < T < \infty$.

Приступим к выводу глобальных априорных оценок.

Из уравнений (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $v(x,t)$ и $\theta(x,t)$ неотрицательны.

Введем вспомогательную функцию $\theta_1(x,t)$ как решение краевой задачи /2/:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right), \quad (x,t) \in Q = (0,1) \times (0,T), \\ \theta_1|_{x=0} &= \chi_0(t), \quad \theta_1|_{x=1} = \chi_1(t), \quad \theta_1|_{t=0} = \theta_0(x). \end{aligned} \quad (4)$$

По принципу максимума для параболических уравнений:

$$0 < m_1 \leq \theta_1(x,t) \leq M_1 < \infty.$$

Обозначим через $\varphi(x,t)$ новую искомую функцию:

$$\varphi(x,t) = \frac{\theta(x,t)}{\theta_1(x,t)}.$$

Система уравнений (1) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta_1}{v} \varphi \right) - H \frac{\partial H}{\partial x} - \beta(x) |u|^6 u, \\ \theta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta_1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{1}{v} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\theta_1}{v} \varphi \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial}{\partial t} (vH) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial H}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия примут вид:

$$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=1} = 1, \quad H|_{x=0} = H|_{x=1} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \chi_0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \chi_1(t),$$

$$v|_{x=0} = \int_0^t \chi_0(\tau) d\tau + v_0(0) = \alpha_1(t), \quad v|_{x=1} = \int_0^t \chi_1(\tau) d\tau + v_0(1) = \alpha_2(t),$$

где $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ – строго положительные, ограниченные функции. Здесь использовалось первое уравнение системы (5).

Справедлива оценка

$$U(t) + \int_0^t W(\tau) d\tau \leq C_1, \quad \forall t \in [0, T], \quad (7)$$

где
$$U(t) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} u^2 + \theta_1 (\varphi - \ln \varphi - 1) + \frac{1}{2} v H^2 \right\} dx,$$

$$W(t) = \int_0^1 \left\{ \frac{\theta_1 \varphi_x^2}{v \varphi^2} + \frac{u_x^2}{v \theta} + \frac{H_x^2}{v \theta} + \beta(x) |u|^\alpha u^2 \right\} dx.$$

Докажем (7). Второе уравнение системы (1) умножим на u , третье – на $(1 - 1/\varphi)$, четвертое – на H . Сложим получившиеся соотношения и проинтегрируем по x и t . При этом воспользуемся равенствами /2/:

$$\theta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\theta_1 (\varphi - \ln \varphi - 1)) - (\varphi - \ln \varphi - 1) \frac{\partial \theta_1}{\partial t},$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} (\varphi - \ln \varphi - 1) \right) - (\varphi - \ln \varphi - 1) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right).$$

После некоторых преобразований получим соотношение

$$U(t) + \int_0^t W(\tau) d\tau \leq C \left(1 + \int_0^1 \int_0^t \frac{\theta_1 \varphi}{v} dx d\tau \right). \quad (8)$$

Из уравнения теплопроводности системы (1) выводится неравенство /2, 4/:

$$\int_0^1 \int_0^t \frac{\theta_1 \varphi}{v} dx d\tau \leq C \left(1 + \int_0^t \max_{0 \leq x \leq 1} U(\tau) d\tau \right).$$

Подставляя его в (8) и применяя лемму Гронуолла, находим (7).

Аналогично /2, 4/ выводится вспомогательное соотношение между искомыми функциями:

$$v(x, t) = B^{-1}(x, t) K(x, t) \left[v_0(x) + \int_0^t \left(\theta + \frac{1}{2} v H^2 \right) (x, \tau) B(x, \tau) K^{-1}(x, \tau) d\tau \right], \quad (9)$$

где

$$B(x, t) = \exp \left\{ \int_0^x (u_0(\xi) - u(\xi, t)) d\xi \right\}, \quad K(x, t) = \exp \left\{ \int_0^t \int_0^x \beta(\xi) |u|^\alpha u(\xi, \tau) d\xi d\tau \right\}.$$

Из (7) вытекают оценки:

$$C_2^{-1} \leq B(x, t) \leq C_2, \quad C_3^{-1} \leq K(x, t) \leq C_3. \quad (10)$$

Пусть $h(x, t)$ – непрерывная функция. Введем обозначения

$$M_h(t) = \max_{x \in \Omega} h(x, t), \quad m_h(t) = \min_{x \in \Omega} h(x, t).$$

Из представления (9), с учетом (7), имеем

$$m_v(t) \geq C_4, \quad \int_0^1 v(x, t) dx \leq C_5, \quad \forall t \in [0, T] \quad (11)$$

Введем вспомогательные функции $\psi(x, t)$ и $f(x, t)$, используя граничные условия /4/:

$$\psi(x, t) = \chi_0(t)(1-x) + \chi_1(t)x, \quad f(x, t) = \alpha_1(t)(1-x) + \alpha_2(t)x,$$

причем $0 < C_6^{-1} < \psi(x) < C_6$, $\psi'_x \in W_2^1(Q)$,

$$0 < C_7^{-1} < \psi(x) < C_7, \quad |f'_x| < C_8, \quad f'_t \in W_2^1(0, T; L_2(\Omega)).$$

Умножим уравнение (4) на $(\theta_1 - \psi)$ и проинтегрируем по Q . После некоторых преобразований имеем оценку:

$$\|\theta_1(t)\|^2 + \int_0^t \int_0^1 \frac{\theta_{1x}^2}{v} dx d\tau \leq C_9, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (12)$$

Из (7) и (12) вытекает оценка:

$$\int_0^1 \theta dx + \int_0^t \int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx d\tau \leq C_{10}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Обратимся к уравнениям импульса и магнитного поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\ln v)_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta}{v} \right) + H \frac{\partial H}{\partial x} + \beta(x)|u|^6 u, \\ \frac{\partial}{\partial t}(vH) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial H}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Умножим их на $\frac{\partial \ln v}{\partial x}$ и (vH) соответственно, проинтегрируем по Ω и сложим.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \ln v}{\partial x} \right)^2 + (vH)^2 \right] dx + \int_0^1 \left[H_x^2 + \frac{\theta}{v} \left(\frac{\partial \ln v}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 u \frac{\partial \ln v}{\partial x} dx + \int_0^1 \frac{1}{v} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \ln v}{\partial x} dx + \int_0^1 \frac{1}{v} u_x^2 dx + \int_0^1 \beta(x)|u|^6 u \frac{\partial \ln v}{\partial x} dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Умножим второе уравнение системы (1) на u и проинтегрируем по Ω . После некоторых преобразований получим неравенство:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{v} u_x^2 dx \leq C_{11} \left(M_\theta(t) + \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{v} H_x^2 dx + C_\varepsilon \right). \quad (14)$$

Умножая четвертое уравнение системы (1) на H и интегрируя по Ω , после некоторых преобразований имеем неравенство:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 v H^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{v} H_x^2 dx \leq C_{12} \int_0^1 \frac{1}{v} u_x^2 dx. \quad (15)$$

Умножим (14) на $2C_{12}$ и сложим с (15). Выбирая $\varepsilon > 0$ так, чтобы $2C_{11}C_{12}\varepsilon < 1$, после интегрирования по t получим

$$\int_0^t \int_0^1 \frac{1}{v} (u_x^2 + H_x^2) dx d\tau \leq C_{13} \left(1 + \int_0^t M_\theta(\tau) d\tau \right). \quad (16)$$

Далее, рассуждая аналогично [2, 4], выводятся оценки:

$$M_v(t) \leq C_{14}, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|v_x(t)\| \leq C_{15}, \quad \int_0^T (\|u_x\|^2 + \|H_x\|^2 + M_\theta(t) + M_H^2(t)) dt \leq C_{16}.$$

Умножением четвертого уравнения системы (1) на H_{xx} и интегрированием выводится оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|H_x(t)\|^2 + \int_0^T \|H_{xx}(t)\|^2 dt \leq C_{17}.$$

Аналогично можно получить все априорные оценки, необходимые для доказательства теоремы. Доказательство единственности производится на основе полученных априорных оценок составлением однородного уравнения относительно разности двух возможных решений.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – М.: Мир, 1964. – 301 с.
2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
3. Искендерова Д.А. Локальная разрешимость краевой задачи для уравнений магнитной газовой динамики // Вестн. Казахск. гос. нац. ун-та. Сер. мат., мех., информатики. – 2001. – № 3(26). – С.56-61.
4. Смагулов Ш.С., Искендерова Д.А. Математические вопросы модели магнитной газовой динамики. – Алматы: Гылым, 1997. – 166 с.