

ДВИЖЕНИЕ ПОРШНЯ В ВЯЗКОМ ГАЗЕ

Рассматривается движение поршня массы "m" в трубке, заполненной газом в пористой среде с учетом магнитного поля. Движение считается одномерным, газ – вязким теплопроводным, поршень движется за счет разности напряжений, трением поршня о стенки пренебрегаем. Будем исследовать задачу в массовых лагранжевых переменных. Примем для простоты, что концы трубки находятся в точках $x=-1, x=1$, точка $x=0$ есть начальное положение поршня. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= (-1, 0), \quad \Omega_2 = (0, 1), \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad Q_i = \Omega_i \times (0, T), \quad i = 1, 2, \\ \Gamma &= \{(0, t) | 0 < t < T\}, \quad 0 < T < \infty, \\ v &= \rho^{-1}, \quad \sigma = \mu \rho u_x - p, \quad F = \lambda \rho \theta_x, \quad G = \mu_H \rho H_x, \quad p = R \rho \theta, \\ [f] &= f(+0, t) - f(-0, t) - \text{скачок функции } f.\end{aligned}$$

Система уравнений, описывающих состояние газа, имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}v_t &= u_x, \\ u_t &= \sigma_x - \mu_1 H H_x - |u|^6 u, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \theta_t &= F_x + u_x \sigma + \frac{\mu_1 \mu_H}{v} H_x^2, \\ (vH)_t &= G_x, \quad (x, t) \in (\Omega_1 \times (0, T)) \cup (\Omega_2 \times (0, T)).\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $R, \mu, \lambda, \mu_1, \mu_H$ - положительные постоянные, которые в дальнейшем, не нарушая общности, будем принимать равными единице.

Движение поршня определяется вторым законом Ньютона:

$$mU_t = [\sigma], \quad U = u(0, t), \quad t \in (0, T). \tag{2}$$

На линии $x=0$ выполняются условия:

$$[u] = [\theta] = [H] = [F] = [G] = 0. \tag{3}$$

Система (1)-(3) замыкается добавлением граничных и начальных данных:

$$u = H = F = 0 \quad \text{при} \quad x = -1, x = 1, \quad t \in (0, T) \tag{4}$$

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad \theta = \theta_0, \quad H = H_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{5}$$

и выполнены условия согласования. Функции u_0, v_0, θ_0, H_0 предполагаются гладкими при $x \neq 0$ и удовлетворяющими условиям (2), (3) при $x=0$.

ТЕОРЕМА. Пусть начальные данные (5) удовлетворяют условиям

$$(u_0, v_0, \theta_0, H_0) \in W_2^2(\Omega_i), \quad i = 1, 2, \quad 0 < m_0 \leq (v_0, \theta_0) \leq M_0 < \infty.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(5) «в целом» по времени, причем

$$v(t) \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega_i)), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega_i)), \quad (u(t), \theta(t), H(t)) \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega_i)),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega_i)) \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega_i)),$$

$v(x, t), \theta(x, t)$ – строго положительные, ограниченные функции.

Доказательство теоремы проведем методом априорных оценок. Выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C_i, C_j в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения. На основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение /2,3/ продолжается на весь промежуток времени $[0, T], 0 < T < \infty$.

Норму функции f в пространствах $L_1(\Omega_i), L_2(\Omega_i), W_2^1(\Omega_i)$ будем обозначать соответственно $\|f\|_{1, \Omega_i}, \|f\|_{\Omega_i}, \|f\|_{1,2, \Omega_i}$, и для каждой нормы положим

$$\|f\| = \|f\|_{\Omega_i} + \|f\|_{\Omega_i}.$$

Непосредственно из первого уравнения системы (1) вытекает оценка

$$\int_{\Omega} v(x, t) dx = \int_{\Omega} v_0(x) dx = I, \quad \Omega = (-1, 1), \quad t \in (0, T). \quad (6)$$

После умножения уравнений системы (1) на $(1-1/v)$, u , $(1-1/\theta)$ и H соответственно, выводится закон сохранения

$$E_1(t) + \int_0^t E_2(\tau) d\tau = E_1(0) = E_1 = \text{const} > 0, \quad (7)$$

$$E_3(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{\theta^2}{v\theta^2} + \frac{u^2}{v\theta} + \frac{H^2}{v\theta} + |u|^\alpha u^2 \right) dx,$$

$$E_2(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v H^2 + (\theta - \ln \theta - 1) + (v - \ln v - 1) \right) dx + \frac{1}{2} m U^2.$$

Аналогично /2, 4/ выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями.

$$v(x, t) = B^{-1}(x, t) I^{-1}(t) K^{-1}(t) S(x, t) \times$$

$$\times \left[v_0(x) + \int_0^t \left(\theta + \frac{1}{2} v H^2 \right) B(x, \tau) I(\tau) K(\tau) S^{-1}(x, \tau) d\tau \right], \quad (8)$$

где

$$B(x, t) = \exp \left\{ \int_{a(t)}^x (u_0(\xi) - u(\xi, t)) d\xi \right\}, \quad K(t) = \exp \{ -\eta(a(t), t) \},$$

$$I(t) = \frac{v_0(a(t))}{v(a(t), t)} \exp \left\{ \int_0^t \left(\frac{\theta}{v} + \frac{1}{2} H^2 \right) (a(t), \tau) d\tau \right\},$$

$$S(x, t) = \exp \left\{ \int_0^t \int_{a(t)}^x \beta(\xi) |u|^\alpha u(\xi, \tau) d\xi d\tau \right\},$$

$$\eta(a(t), t) = \begin{cases} 0, & a(t) \in \Omega_2, \\ \int_0^t [\sigma] d\tau = m(U - U_0), & a(t) \in \Omega_1. \end{cases}$$

Используя (6), (7), можно получить оценки:

$$\begin{aligned} 0 < C_1^{-1} \leq B(x, t) \leq C_1, \quad 0 < C_2^{-1} \leq I(t) \leq C_2, \\ 0 < C_3^{-1} \leq K(t) \leq C_3, \quad 0 < C_4^{-1} \leq S(x, t) \leq C_4, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $h(x, t)$ — непрерывная функция. Введем обозначения:

$$M_h(t) = \max_{x \in \Omega} h(x, t), \quad m_h(t) = \min_{x \in \Omega} h(x, t).$$

Из (8) в силу (9) вытекает оценка:

$$m_v(t) \geq C_5, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (10)$$

Умножим уравнение теплопроводности на $\frac{1}{\theta^{1/2}}$ и проинтегрируем по Ω .

После некоторых преобразований /4/ выводим оценку:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left\{ \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} + \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} \right\} dx dt \leq C_6. \quad (11)$$

Докажем ограниченность удельного объема:

$$M_v(t) \leq C_7, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (12)$$

В виду равенства (8) получим оценки для $M_\theta(t), M_H^2(t)$.

$$M_\theta(t) \leq C + \int_{\Omega} |\theta_x| dx \leq C + \left(\int_{\Omega} \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} v\theta^2 dx \right)^{1/2} \leq C [1 + A^{1/2}(t) M_v^{1/2}(t) M_\theta^{1/2}(t)],$$

$$\text{где } A(t) = \int_{\Omega} \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx.$$

Отсюда, применяя неравенство Юнга с ε , находим

$$M_\theta(t) \leq C_\varepsilon A(t) M_v(t) + C. \quad (13)$$

Далее, используя (11), получим

$$\begin{aligned} M_H^2(t) &\leq 2 \int_{\Omega} |H H_x| dx \leq 2 \left(\int_{\Omega} \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} v H^2 dx \right)^{1/2} M_\theta^{1/2}(t) \leq \\ &\leq C \left[\int_{\Omega} \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} dx + \int_{\Omega} \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} dx + 1 \right]. \end{aligned}$$

После интегрирования по t с учетом (11), имеем оценку:

$$\int_0^T M_H^2(t) dt \leq C_8. \quad (14)$$

Таким образом, учитывая (13), (14), из (8) следует представление

$$M_v(t) \leq C \left[1 + \int_0^t (A(\tau) + M_H^2(\tau)) M_v(\tau) d\tau \right].$$

Применение леммы Гронуолла дает оценку (12).

Соотношение (13) ведет к оценке:

$$\int_0^T M_\theta(t) dt \leq C_9.$$

Проинтегрируем уравнение теплопроводности системы (1) по $\Omega \times (0, T)$. После некоторых преобразований заключаем

$$\int_0^T (\|u_x(t)\|^2 + \|H_x(t)\|^2) dt \leq C_{10}.$$

Четвертое уравнение системы (1) умножим на $-\frac{1}{v}G_x$ и проинтегрируем по Ω :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|G\|^2 + \int_\Omega \frac{1}{v} G_x^2 dx = \int_\Omega \frac{1}{v} u_x G_x H dx - \int_\Omega u_x G^2 dx = J_1 + J_2. \quad (15)$$

Оценим каждое J_i , $i=1,2$, учитывая полученные ранее оценки.

$$J_1 \leq \delta_1 \int_\Omega \frac{1}{v} G_x^2 dx + \int_\Omega \frac{1}{v} u_x^2 H^2 dx \leq \delta_1 \int_\Omega \frac{1}{v} G_x^2 dx + C(\|G\|^2 + 1) \|u_x\|^2,$$

так как

$$M_H^2(t) \leq 2 \int_\Omega |HH_x| dx \leq 2 \left(\int_\Omega \frac{H_x^2}{v} dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega v H^2 dx \right)^{1/2} \leq \|G\|^2 + E_1,$$

$$J_2 \leq \max_{x \in \Omega} |G| \|G\| \|u_x\| \leq \delta_2 \int_\Omega \frac{1}{v} G_x^2 dx + \|u_x\|^2 \|G\|^2,$$

так как

$$\max_{x \in \Omega} |G| \leq \int_\Omega |G_x| dx \leq \left(\int_\Omega \frac{1}{v} G_x^2 dx \right)^{1/2}.$$

Здесь δ_1, δ_2 — достаточно малые величины. После интегрирования полученного из (15) неравенства по t выводим

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|H_x(t)\|^2 + \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{v} \left(\frac{1}{v} H_x \right)^2 dx dt \leq C_{11}. \quad (16)$$

Из (16) и (7) следует оценка:

$$M_H^2(t) \leq C_{12}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Непосредственно из системы (1) вытекает оценка:

$$\int_0^T \|H_t(t)\|^2 dt \leq C_{13}.$$

Уравнение импульса системы (1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \ln v}{\partial x} - u \right) = \frac{\theta_x}{v} - \frac{\theta}{v} \frac{\partial \ln v}{\partial x} + HH_x + |u|^6 u$$

умножим на $q = \frac{\partial \ln v}{\partial x} - u$, а затем проинтегрируем по Ω :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q\|^2 + \int_\Omega \frac{\theta}{v} \left(\frac{\partial \ln v}{\partial x} \right)^2 dx = \int_\Omega \left\{ \frac{\theta_x}{v} q + \frac{\theta}{v} \frac{\partial \ln v}{\partial x} u + HH_x q + |u|^6 u q \right\} dx.$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части с учетом неравенств Коши, Юнга и полученных выше оценок. После некоторых преобразований имеем:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|v_x(t)\|^2 \leq C_{14}.$$

Рассуждая аналогично, можно получить все глобальные априорные оценки, необходимые для доказательства существования обобщенного решения. Единственность выводится составлением однородного уравнения для разности двух возможных решений и проведением некоторых преобразований, аналогично /2, 3, 4/.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – М.: Мир, 1964. – 301 с.
2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
3. Шелухин В.В. Однозначная разрешимость задачи о движении поршня в вязком газе // Динамика сплошной среды. – 1977. – Вып. 31. – С. 132–150.
4. Искендерова Д.А. Задача о движении поршня в вязком газе с учетом магнитного поля // Докл. Мин. науки – Акад. наук Республики Казахстан. – 1998. – № 5. – С.8–18.