

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая одномерное течение вязкого теплопроводного газа с учетом магнитного поля в пористой среде с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры, в лагранжевых координатах имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad v = \frac{\rho^0}{\rho}, \\ \rho^0 \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} - \mu_1 H \frac{\partial H}{\partial x} - \beta(x) |u|^6 u, \quad p = k \rho^0 \frac{\theta}{v}, \\ \rho^0 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda(\theta)}{v} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu_1 \mu_H}{v} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial}{\partial t} (vH) &= \mu_H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial H}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь v, u, θ, H, p – соответственно удельный объем, скорость, абсолютная температура, напряженность магнитного поля, плотность и давление – искомые функции пространственной переменной $x, x \in \Omega = (0, 1)$ и времени $t, t \in [0, T], 0 < T < \infty$; μ, k, μ_1, μ_H – положительные постоянные, которые в дальнейшем, для простоты, будем предполагать равными единице; $\beta(x)$ – коэффициент проницаемости – непрерывная, неотрицательная, ограниченная функция и $\int \beta(x) dx \leq C$; $0 \leq \alpha \leq 1$; $\lambda(\theta)$ – коэффициент теплопроводности среды – некоторая положительная функция.

В начальный момент $t=0$ все характеристики среды известны:

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta^0(x), \quad H|_{t=0} = H^0(x), \quad v|_{t=0} = 1, \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

причем $(\rho^0, u^0, \theta^0, H^0)$ – непрерывные, (ρ^0, θ^0) – ограниченные, неотрицательные функции и $\rho^0(x)$ имеет вырождение при $x=1$, то есть $\rho^0(1)=0$,

$$0 \leq \rho^0(x) \leq C_0 < \infty, \quad 0 < m_0 \leq \theta^0(x) \leq M_0 < \infty.$$

Искомые функции удовлетворяют граничным условиям:

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=1} = H|_{x=0} = H|_{x=1} = 0 \quad (3)$$

и выполнены условия согласования.

Определение. Обобщенным решением задачи (1)–(3) называется совокупность функций (v, u, θ, H) ,

$$\begin{aligned} v(t) &\in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad \left(\sqrt{\rho^0} \frac{\partial u}{\partial t}, \sqrt{\rho^0} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \in L_2(Q), \\ (u(t), H(t)) &\in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \\ (v(t), \sqrt{\rho^0} \theta(t), \sqrt{\rho^0} \theta_x(t)) &\in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \quad \Omega = (0, 1), \quad Q = \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

удовлетворяющих уравнениям (1) почти всюду в Q и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Теорема. Пусть $\lambda(\theta) = \chi\theta$, $\chi = \text{const}$ и начальные данные (2) обладают следующими свойствами гладкости:

$$\begin{aligned} (\rho^0(x), u^0(x), \theta^0(x)) &\in W_2^1(\Omega), \quad \frac{\rho_x^0(x)}{\rho^0(x)} \in L_2(\Omega), \quad \frac{\rho^0(x)}{\inf_{0 \leq s \leq x} \rho^0(s)} < C, \\ \left(\sqrt{\rho^0} u_t \Big|_{t=0}, \sqrt{\rho^0} \theta_t \Big|_{t=0} \right) &\in L_2(\Omega), \quad H^0(x) \in W_2^2(\Omega), \quad \frac{H^0(x)}{\sqrt{\rho^0}} \in L_2(\Omega). \end{aligned}$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3) «в целом» по времени, причем $v(x,t), \theta(x,t)$ – строго положительные функции, $v(x,t), \rho^0(x,t)$ – ограниченные функции.

Доказательство теоремы проведем методом регуляризации. Вместо поставленной задачи рассмотрим регуляризованную, т.е. заменим ρ^0 на $\rho^0 \varepsilon$, где $\rho^0 \varepsilon \geq \varepsilon > 0$ и $\rho^0 \varepsilon$ стремится к ρ^0 по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для регуляризованной задачи имеем теорему существования и единственности на любом конечном интервале времени аналогично [2, 3]. Таким образом, доказательство теоремы сводится к получению равномерных априорных оценок и осуществлению предельного перехода.

Рассмотрим регуляризованную задачу. Не нарушая общности, для простоты, положим все физические постоянные в системе (1), равными единице

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} &= 0, \quad v_\varepsilon = \frac{\rho_\varepsilon^0}{\rho_\varepsilon}, \\ \rho_\varepsilon^0 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_\varepsilon^0 \frac{\theta_\varepsilon}{v_\varepsilon} \right) - H_\varepsilon \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial x} - \beta(x) |u_\varepsilon|^6 u_\varepsilon, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon^0 \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta_\varepsilon}{v_\varepsilon} \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x} \right) - \rho_\varepsilon^0 \frac{\theta_\varepsilon}{v_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{v_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{v_\varepsilon} \left(\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial}{\partial t} (v_\varepsilon H_\varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v_\varepsilon} \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial x} \right), \\ u_\varepsilon \Big|_{t=0} &= u^0(x), \quad \theta_\varepsilon \Big|_{t=0} = \theta^0(x), \quad H_\varepsilon \Big|_{t=0} = H^0(x), \quad v_\varepsilon \Big|_{t=0} = 1, \quad x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (5)$$

$$u_\varepsilon \Big|_{x=0} = u_\varepsilon \Big|_{x=1} = \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=1} = H_\varepsilon \Big|_{x=0} = H_\varepsilon \Big|_{x=1} = 0, \quad (6)$$

где $\rho_\varepsilon^0 = \rho^0 + \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\rho_\varepsilon^0 - \rho^0\|_{W_2^1(\Omega)} = 0$.

В дальнейшем индекс ε будем опускать, а через C, C_ε, C_N обозначаются положительные константы, зависящие от данных задачи и величины T , но не зависящие от ε .

Приступим к выводу глобальных априорных оценок.

Из системы (4), после интегрирования по x и t , имеем

$$\int_0^1 v(x,t) dx = 1, \quad \forall t \in [0, T], \quad (7)$$

Умножим второе уравнение системы (4) на u , четвертое на H и сложим с третьим. После интегрирования по x и t выводим оценку

$$\int_0^t \left\{ \rho^0 u^2 + \rho^0 \theta + \frac{1}{2} v H^2 + \beta(x) |u|^\alpha u^2 \right\} dx \leq N_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (8)$$

Первое уравнение системы (4) умножим на $\rho^0(1-1/v)$, второе – на u , третье – на $(1-1/\theta)$, четвертое – на H . Сложим получившиеся соотношения и проинтегрируем по x и t . Проводя некоторые преобразования, получим

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 \left\{ \rho^0 u^2 + \rho^0 (\theta - \ln \theta - 1) + \rho^0 (v - \ln v - 1) + \frac{1}{2} v H^2 \right\} dx + \\ + \int_0^T \int_0^1 \left\{ \frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{\theta_x^2}{v\theta} + \frac{H_x^2}{v\theta} + \beta(x) |u|^\alpha u^2 \right\} dx dt \leq N_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (7) следует, что при любом t найдется, по крайней мере, одна точка $x_0(t) \in [0, 1]$ в которой $v(x_0(t), t) = 1$. Из первого и второго уравнений системы (4) выводится вспомогательное соотношение между искомыми функциями [3, 4]:

$$\begin{aligned} v(x, t) = B^{-1}(x, t) I^{-1}(t, x_0) K(x, t) \times \\ \times \left[1 + \int_0^t \left(\rho^0(x) \theta(x, \tau) + \frac{1}{2} v(x, \tau) H^2(x, \tau) \right) B(x, \tau) I(\tau, x_0) K^{-1}(x, \tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{где } B(x, t) = \exp \left\{ \int_{x_0(t)}^x \rho^0(\xi) [u_0(\xi) - u(\xi, t)] d\xi \right\},$$

$$I(t, x_0) = \exp \left\{ \int_0^t \left(\rho^0 \frac{\theta}{v} + \frac{1}{2} H^2 \right) (x_0(\tau), \tau) d\tau \right\},$$

$$K(x, t) = \exp \left\{ \int_0^t \int_{x_0(\tau)}^x \beta(\xi) |u|^\alpha u(\xi, \tau) d\xi d\tau \right\}$$

Справедливы оценки:

$$N_2^{-1} \leq B(x, t) \leq N_2, \quad N_3^{-1} \leq I(t, x_0) \leq N_3, \quad N_4^{-1} \leq K(x, t) \leq N_4. \quad (11)$$

Оценки для $B(x, t)$ и $K(x, t)$ вытекают из (8). Доказательство второго соотношения следует из (10), после интегрирования его по t , с учетом (7), (8) и леммы Гронуолла.

Пусть $h(x, t)$ — непрерывная функция. Введем обозначения:

$$M_h(t) = \max_{x \in \Omega} h(x, t), \quad m_h(t) = \min_{x \in \Omega} h(x, t).$$

Из представления (10), с учетом (11), имеем

$$m_v(t) \geq N_5, \quad \forall t \in [0, T] \quad (12)$$

$$M_v(t) \leq C \left[1 + \int_0^t (M_{\rho^0 \theta}(\tau) + M_H^2(\tau) M_v(\tau)) d\tau \right]. \quad (13)$$

Аналогично [4] выводятся оценки

$$M_{\rho^0 \theta}(t) \leq C(1 + A(t) M_v(t)), \quad A(t) = \int_0^t \frac{\theta_x^2}{v\theta} dx, \quad (14)$$

$$\int_0^T M_H^2(t) dt \leq N_6. \quad (15)$$

Таким образом, из (13) вытекает

$$M_v(t) \leq C \left[1 + \int_0^t (A(\tau) + M_H^2(\tau)) M_v(\tau) d\tau \right]. \quad (16)$$

Применяя к (16) лемму Гронуолла с учетом (9), (15), приходим к оценке $M_v(t) \leq N_7, \forall t \in [0, T]$. (17)

Из уравнения теплопроводности системы (4) следует оценка:

$$m_\theta(t) \geq N_8, \forall t \in [0, T].$$

Ограниченность $v(x, t)$ и (14) дают оценку:

$$\int_0^T M_{\rho^0 \theta}(t) dt \leq N_9. \quad (18)$$

Проинтегрируем уравнение теплопроводности системы (4) по Ω :

$$\int_0^1 \frac{1}{v} (u_x^2 + H_x^2) dx = \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho^0 \theta dx + \int_0^1 \rho^0 \frac{\theta}{v} u_x dx.$$

Оценивая интеграл в правой части с учетом (8), (12), (17), (18), после интегрирования по t получим:

$$\int_0^T (\|u_x(t)\|^2 + \|H_x(t)\|^2) dt \leq N_{10}. \quad (19)$$

Второе и четвертое уравнения системы (4) умножим на $(\ln v)_x$ и vH соответственно, проинтегрируем по Ω и сложим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [(\ln v)_x^2 + (vH)^2] dx + \int_0^1 \left[H_x^2 + \rho^0 \frac{\theta}{v} (\ln v)_x^2 \right] dx = \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho^0 u (\ln v)_x dx + \\ & + \int_0^1 \rho^0 \frac{1}{v} u_x^2 dx + \int_0^1 \rho_x^0 u \frac{1}{v} u_x dx + \int_0^1 \left(\rho^0 \frac{\theta_x}{v} - \rho_x^0 \frac{\theta}{v} + \beta(x) |u|^\alpha u \right) (\ln v)_x dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Оценим интегралы в правой части (20), используя неравенства Юнга, Гельдера, Коши, условия теоремы для $\rho^0(x)$ и оценки (8), (12), (17). После некоторых преобразований [4] получим неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [(\ln v)_x^2 + (vH)^2] dx + \int_0^1 \left[H_x^2 + \rho^0 \frac{\theta}{v} (\ln v)_x^2 \right] dx = \\ & \leq \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho^0 u (\ln v)_x dx + C \left(1 + \int_0^1 \frac{\theta_x^2}{v \theta} dx \right) (1 + \|(\ln v)_x\|^2) + C (\|u_x\|^2 + M_{\rho^0 \theta} + 1). \end{aligned}$$

Проинтегрируем его по t . Учтем, что

$$\int_0^1 \rho^0 u (\ln v)_x dx \leq \gamma \|(\ln v)_x\|^2 + C_\gamma,$$

где γ — произвольное положительное число. После применения леммы Гронуолла с использованием (9), (18), (19) имеем

$$\|(\ln v)_x\|^2 \leq N_{11}, \quad \forall t \in [0, T].$$

или с учетом (17):

$$\|v_x(t)\|^2 \leq N_{12}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (21)$$

Четвертое уравнение системы (4) умножим на H_{xx} и проинтегрируем по Ω и по t . После некоторых преобразований имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|H_x\|^2 + \int_0^T (\|H_{xx}(t)\|^2 + \|H_t(t)\|^2) dt \leq N_{13}. \quad (22)$$

Из (8), (12), (22) вытекает оценка:

$$M_H^2(t) \leq 2\|H\|\|H_x\| \leq N_{14}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (23)$$

$$\frac{1}{\rho^0}(vH)$$

Уравнение магнитного поля системы (4) умножим на $\frac{1}{\rho^0}(vH)$ и проинтегрируем по Ω :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{\rho^0} (vH)^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{\rho^0} H_x^2 dx = \int_0^1 \frac{\rho_x^0}{\rho^{02}} HH_x dx + \int_0^1 \frac{1}{\rho^0} \frac{v_x}{v} HH_x dx = I_1 + I_2. \quad (24)$$

Оценим I_1, I_2 , используя условия теоремы и оценки (12), (17), (22).

$$I_1 \leq \varepsilon_1 \int_0^1 \frac{1}{\rho^0} H_x^2 dx + C_{\varepsilon_1} \int_0^1 \frac{1}{\rho^0} (vH)^2 dx.$$

Здесь учитывалось соотношение

$$\begin{aligned} \frac{H^2(x, t)}{\rho^0(x)} &= \int_0^x \left(\frac{\rho_s^0}{\rho^{02}} H^2 + 2 \frac{1}{\rho^0} HH_s \right) ds \leq \\ &\leq C \int_0^1 \frac{1}{\rho^0} (vH)^2 dx + \delta M_{H^2/\rho^0}(t) + C \left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^0} H_x^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^0} (vH)^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Выбирая $0 < \delta < 1$, имеем

$$M_{H^2/\rho^0}(t) \leq C \int_0^1 \frac{1}{\rho^0} (vH)^2 dx + C \left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^0} H_x^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^0} (vH)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Далее,

$$I_2 \leq \varepsilon_2 \int_0^1 \frac{1}{\rho^0} H_x^2 dx + C_{\varepsilon_2} \int_0^1 \frac{1}{\rho^0} (vH)^2 dx.$$

Выбираем $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$. С учетом полученных оценок проинтегрируем (24) по t . Применение леммы Гронуолла дает оценку

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{H}{\sqrt{c^0}} \right\|^2 + \int_0^T \left\| \frac{H_x}{\sqrt{c^0}} \right\|^2 dt \leq N_{15}. \quad (25)$$

Аналогично получаются все априорные оценки, необходимые для доказательства существования решения. Предельный переход осуществляется на основе полученных равномерных априорных оценок /5/. Доказательство единственности проводится составлением однородной системы уравнений относительно разности двух возможных решений /4, 5/.

Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – М.: Мир, 1964. – 301 с.
2. Кажихов А.В., Смагулов Ш.С. Корректность и приближенные методы для модели магнитной газовой динамики // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1986. – № 6. – С. 82–84.
3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
4. Искендерова Д.А. Начально-краевая задача для уравнений магнитной газовой динамики с вырождающейся плотностью // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т.36. – № 6. – С.765–773.
5. Смагулов Ш.С., Искендерова Д.А. Математические вопросы модели магнитной газовой динамики. – Алматы: Гылым, 1997. – 166 с.