

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ УРОВНЕМ ГРУНТОВЫХ ВОД НА ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКОМ ОБЪЕКТЕ

Рассматривается задача оптимального управления уровнем грунтовых вод в однослойном пласте с применением горизонтального дренажа

При близком залегании (1-2 м) пресных грунтовых вод развивается заболачивание, соленакопление в почвах. При напорном питании грунтовых вод интенсивность процессов соленакопления возрастает.

Специфика конструктивных особенностей применяющихся до сих пор гидромелиоративных систем – земляные каналы, примитивная техника полива, низкий к.п.д. оросительных систем – приводит к неизбежному подъему уровня грунтовых вод (УГВ) и к гидроморфному режиму орошаемых земель на оросительных системах, расположенных на предгорных равнинах, не имеющих достаточной естественной дренированности. Для таких территорий необходимо разработать методику проведения гидромелиоративных мероприятий по поддержанию оптимального УГВ, обеспечивающих влагой корневую систему растений и не допускающих вторичного засоления почвогрунтов.

Рассматривается движение подземных вод в предгорной зоне, ограниченной с юга горами Γ_1 , а с запада, востока и севера – реками Γ_2 , Γ_4 , Γ_3 соответственно (рис. 1). По гидродинамическим условиям воды преимущественно грунтовые, реже напорные, их разгрузка часто контролируется эрозионными врезами. Питание подземных вод обусловлено, главным образом, водами поверхностного стока, подземным притоком и атмосферными осадками. В рассматриваемом объекте можно выделить две зоны: зона формирования и транзита и зона близкого залегания, частичного выклинивания грунтовых и распространения субнапорных вод.

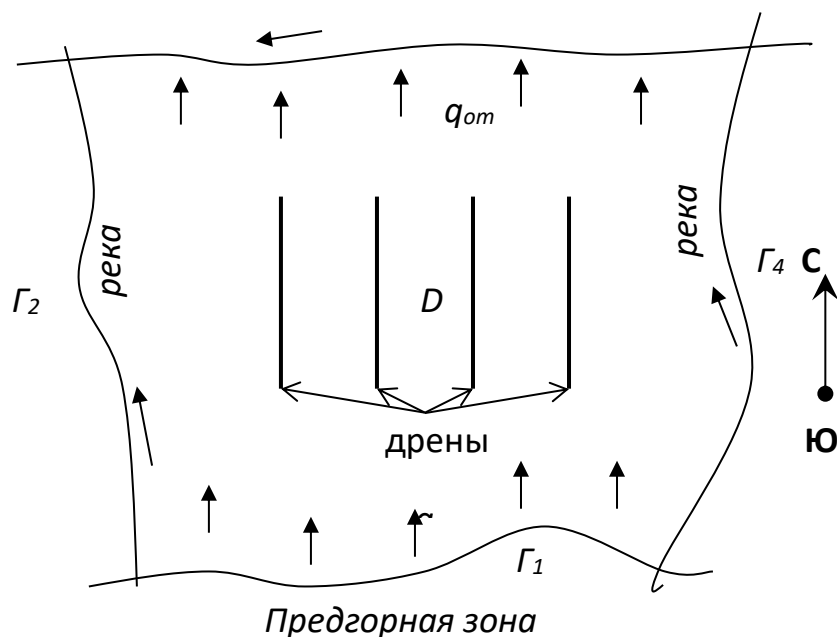


Рис. 1.

Схема области фильтрации

Первая зона (формирования и транзита) по площади охватывает верхние и центральные части подгорного шлейфа, образовавшихся за счет слияния конусов выноса горных рек. Глубина залегания подземных вод от 10-20 м (в центральных частях конусов выноса) до 30-70 м (в верхних).

Вторая зона приурочена к периферическим частям конусов выноса и пологой озерно – аллювиальной равнине. Высокое стояние УГВ (от 0-2 до 5-10 м) в ее пределах обусловлено прежде всего резким преобладанием в разрезах тонких генераций осадков в совокупности с незначительными уклонами, затрудняющими отток. Наблюдаемое здесь выклинивание грунтовых вод, в основном, контролируется как долинами рек, так и участками сочленения в продольном разрезе галечниками с более тонкозернистыми супесчано – глинистыми породами.

Район исследований характеризуется сложным типом гидрогеологических условий орошаемых районов. С поверхности и до глубины в среднем 6 м залегают суглинки средние, тяжелые и легкие с коэффициентом фильтрации, в среднем, 0.43 – 1.81 м /сут. Для расчета принимаем средний коэффициент, равный 1 м/сут. По данным проведенных откачек из напорного водоносного горизонта было установлено, что водовмещающие породы обладают коэффициентом фильтрации 21.8 м/сут (средняя величина из полученных).

В настоящее время глубина залегания грунтовых вод на массиве составляет 0 – 5 м и при преобладающих глубинах 1 – 3 м и 2 – 3 м. Проектная норма

осушения принята равной 1.5 м. для поддержания грунтовых вод на этой глубине необходимо устройство горизонтального дренажа. Ставится задача – определить значения функции инфильтрации $f(x, y)$ (сброс воды по коллекторно – дренажной сети за пределы территории), обеспечивающие проектные УГВ.

Поставленную задачу целесообразно решить в два этапа. На первом этапе находится управляющая функция $f(x, y)$, обеспечивающая оптимальные УГВ. На втором этапе решается вопрос о том, как отвести лишнюю воду из участка, для чего необходимо определить дебиты дрен и междренные расстояния.

На первом этапе решается плановая задача установившейся фильтрации грунтовых вод в неоднородной пористой среде /1/

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right)+Qh=f(x,y), \quad (x,y)\in D, \quad (1)$$

где $h(x, y)$ – УГВ;

$$T(x, y)=k(h-b) \quad - \quad (2)$$

водопроницаемость;

$k(x, y)$ – коэффициент фильтрации покровного слоя;

$b(x, y)$ – отметки поверхности раздела между водоносными слоями;

$Q(x, y)$ – функция, учитывающая переток из нижележащих слоев;

$f(x, y)$ – функция инфильтрации;

D – область фильтрации в плане.

На границах области фильтрации задаются краевые условия:

$$\begin{aligned} T\frac{\partial h}{\partial n} &= q_{np}, \quad (x,y)\in\Gamma_1, \\ T\frac{\partial h}{\partial n} &= 0, \quad (x,y)\in\Gamma_2, \Gamma_4, \\ T\frac{\partial h}{\partial n} + \beta h &= \alpha, \quad (x,y)\in\Gamma_3, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 = \partial D,$$

где ∂D – граница области D ;

$q_{np}(x, y)$ – подземный приток из предгорной зоны;

$\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ – функции, определяемые эмпирически.

Поскольку внутри области фильтрации предусматривается устройство горизонтального дренажа, на дренах должны быть заданы внутренние граничные условия

$$-T \frac{\partial h}{\partial n} = \chi(h - h_g), \quad (x, y) \in \Gamma_g, \quad (4)$$

где h_g – уровень воды в дрене;

χ – параметр несовершенства дрены;

Γ_g – линии дрен.

Задача оптимального управления УГВ ставится следующим образом /2/. Требуется построить такую управляющую функцию $f(x, y)$, которая минимизирует функционал

$$J(f) = \iint_D [h(x, y, f) - \varphi(x, y)]^2 dx dy \rightarrow \min, \quad f \in F. \quad (5)$$

Здесь $h(x, y, f)$ – УГВ, зависящие от функции инфильтрации $f(x, y)$; $\varphi(x, y)$ – заданная функция, равная оптимальному УГВ; F – заданное множество, где определен функционал $J(f)$.

Функция $h(x, y, f)$ определяется из задачи (1) – (4), поэтому сначала рассмотрим алгоритм решения этой задачи. Для ее решения применяется итерационный процесс. Задав в нулевом приближении начальные значения $h^{(0)}(x, y)$ и решая задачу, получаем первое приближение $h^{(1)}(x, y)$. Подставляя $h^{(1)}$ вместо h в (2) и решая задачу еще раз, находим $h^{(2)}$ и т.д. Процесс продолжим до выполнения условия

$$\max |h^{(s)} - h^{(s-1)}| < \varepsilon, \quad (x, y) \in D, \quad (6)$$

где s – номер итерации, $\varepsilon > 0$ – заданное число.

Приближенное решение задачи (1) – (4) ищем с помощью метода Галеркина /3/, согласно которому невязки уравнений (1) и (3), (4) должны быть ортогональны базисным функциям. Если функции $N_1(x, y), N_2(x, y), \dots, N_n(x, y)$ образуют базис в рассматриваемом пространстве, то для невязки уравнений (1), (3) и (4) получаем уравнения

$$\iint_D N_j(Lh - f) d\sigma + \int_{\partial D} N_j(lh - \alpha) ds + \int_{\Gamma_g} N_j(l_g h - \alpha_g) ds = 0, \quad (7)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

где

$$L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial}{\partial y} \right) + Q,$$

$$l = T \frac{\partial}{\partial n} - \beta, \quad l_g = T \frac{\partial}{\partial n} - \beta_g,$$

$$\alpha_g = \chi h_g, \quad \beta_g = \chi,$$

$$\alpha = q_{np}, \quad \beta = 0 \text{ на } \Gamma_1,$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0 \text{ на } \Gamma_2, \Gamma_4.$$

Минимум функционала (7) находится с помощью метода конечных элементов [4], при этом разбиение области D на треугольные элементы производится таким образом, чтобы часть узлов располагалась по линии дрен Γ_g . Внутри треугольника (e) с вершинами i, j, k функция $h(x, y)$ ищется в виде

$$h^{(e)}(x, y) = N_i(x, y)h_i + N_j(x, y)h_j + N_k(x, y)h_k, \quad (8)$$

где h_i, h_j, h_k — значения искомой функции в вершинах треугольника (e) ; N_i, N_j, N_k — базисные функции.

Составляя для каждого элемента выражение вида (8) и суммируя их по всем элементам, получаем разложение для искомой функции

$$h(x, y) = \sum_{e=1}^m h^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^m h_i N_i(x, y), \quad (9)$$

где m — число элементов, n — число всех узлов сетки.

Подставляя в равенствах (7) вместо функции $h(x, y)$ ее разложение (9), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно h_i :

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} h_i = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

где

$$a_{ji} = \iint_D T \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D N_i N_j Q d\sigma + \\ + \int_{\Gamma_g} N_i N_j \beta_g ds + \int_{\partial D} N_i N_j \beta ds, \quad (11)$$

$$b_j = \iint_D N_j f d\sigma + \int_{\Gamma_g} N_j \alpha_g ds + \int_{\partial D} N_j \alpha ds.$$

В задаче (5) ищется не сама величина $J_* = \inf J(f)$, а функция f_* , в которой функционал $J(f)$ достигает своей нижней грани на множестве F , т.е.

$$f_* \in F_* = \{f : f \in F, J(f) = J_*\}.$$

Эта задача является некорректно поставленной в метрике пространства L_2 , так как полученная тем или иным методом минимизирующая последовательность $\{f_k\}$ может не сходиться к множеству F_* . Другими словами, если в качестве исходных данных, по которым будет определяется приближение F_* , использовать значения минимизируемой функции, то искомое решение может быть не достигнута, потому что из малости погрешности $J(f_k) - J_*$ не всегда следует близость f_k к F_* в требуемой метрике. Поэтому для приближенного решения некорректных задач требуются специальные методы, позволяющие с гарантией строить минимизирующие последовательности, сходящиеся к множеству оптимальных функций. Одним из таких методов является метод регуляризации А.Н.Тихонова [5], согласно которому задача минимизации функционала (5) сводится к нахождению функции $f(x, y)$, доставляющую минимум функционалу [2]

$$J(f) = \iint_D [h(x, y; f) - \varphi(x, y)]^2 d\sigma + \alpha \iint_D f^2(x, y) d\sigma, \quad (12)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации; $h(x, y; f)$ – расчетные значения УГВ, получаемые решением задачи (1) – (4).

В общем случае зависимость функции $h(x, y; f)$ от управления $f(x, y)$ нелинейная, поэтому линеаризуем функцию $h(x, y; f)$ следующим образом:

$$h(x, y; f) = \tilde{h} + \sum_{j=1}^n (f_j - \tilde{f}_j) \frac{\partial h}{\partial f_j} + R_2(\Delta f), \quad (13)$$

где $\tilde{f}$ – значения функции f , полученные в предыдущей итерации; $\tilde{h}$ – соответствующие им значения УГВ; $R_2(\Delta f)$ – остаточный член разложения; $\Delta f = f - \tilde{f}$.

Подставим выражение для функции h из (13) в формулу (12):

$$J(f) \approx \iint_D \left[\tilde{h} + \sum_{j=1}^n (f_j - \tilde{f}_j) \frac{\partial h}{\partial f_j} - \varphi \right]^2 d\sigma + \alpha \iint_D f^2(x, y) d\sigma$$

и к функции многих переменных $J(f)$ применим необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial J(f)}{\partial f_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Имеем

$$\iint_D \left[\sum_{j=1}^n (f_j - \tilde{f}_j) \frac{\partial h}{\partial f_j} + \tilde{h} - \varphi \right] \frac{\partial h}{\partial f_i} d\sigma + \alpha \iint_D f_i(x, y) d\sigma = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} f_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

где

$$a_{ij} = \sum_{j=1}^n \iint_D \frac{\partial h}{\partial f_i} \frac{\partial h}{\partial f_j} d\sigma, \quad i \neq j,$$

$$a_{ii} = \sum_{i=1}^n \iint_D \left(\frac{\partial h}{\partial f_i} \right)^2 d\sigma + \alpha,$$

$$b_i = \iint_D (\varphi - \tilde{h}) \frac{\partial h}{\partial f_i} d\sigma + \sum_{j=1}^n \iint_D \frac{\partial h}{\partial f_i} \frac{\partial h}{\partial f_j} \tilde{f}_j d\sigma.$$

Системы (10) и (14) хорошо обусловлены и они легко решаются одним из точных или итерационных методов.

Для проведения расчетов по описанному алгоритму в качестве начальных приближений УГВ и инфильтрации берем их состояния на данный момент. Затем придаем функции $f(x, y)$ приращения, пропорциональные разности $\varphi(x, y) - h(x, y)$, вычисляем матрицу производных $\left(\frac{\partial h}{\partial f} \right)$ и решив систему (13), находим новое приближение управления $f^{(k)}(x, y)$. Для каждого нового приближения управления вычисляем соответствующие значения УГВ. Признаком окончания счета является выполнение условия типа (6) для функций h и φ .

Список литературы

1. Полубаринова – Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. – М.:Наука, 1969. – 414 с.
2. Мурзакматов М.У., Шамырканов М.Б. Приближенное решение задачи оптимального управления уровнем грунтовых вод в однослойных пластах. // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова, №24. – Бишкек: 2011. – с.164 – 166.
3. Джаныбеков Ч. Моделирование гидрогеодинамических процессов с применением ЭВМ. – Фрунзе: Илим, 1989. – 183 с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.:Наука, 1974. – 233 с.