

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МЕТОДА ДАВЫДОВА

В связи с потребностями практики все большее значение приобретает исследование глубокой нелинейности рассматриваемых объектов. При численном моделировании задач механики стало необходимым исследовать нелинейные свойства применяемых разностных схем. Для этого с успехом может применяться аппарат дифференциальных приближений. Разностные схемы метода крупных частиц всегда всесторонне и тщательно исследовались с помощью дифференциальных приближений. Вначале метод дифференциального приближения использовался для анализа диссипативных свойств разностных схем метода крупных частиц, исследования их устойчивости (в том числе в криволинейных системах координат). Была выявлена структура аппроксимационной вязкости, исследовались нелинейные колебания, возникающие при решении эволюционных разностных схем. Далее было введено понятие дифференциального приближения разностных граничных условий и исследована устойчивость на границах расчетной области и в их окрестности с учетом постановки реальных условий (непротекания, вдува, абляции теплозащитного покрытия и др.). Было отмечено существование в вычислительной газовой динамике шести типов матриц аппроксимационной вязкости и найдены связи между ними. В дальнейшем стали рассматриваться матрицы аппроксимационной дисперсии.

Для более глубокого изучения разностных схем следует исследовать более высокие дифференциальные приближения. Были рассмотрены дифференциальные приближения высших порядков для многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц в наиболее общем пространственно-трехмерном случае. При этом было также произведено учитывание влияния разностной постановки граничных условий. Матрицы при четвертых по пространству производных от газодинамических функций авторы называли бивязкостью, при пятых производных — бидисперсией, при шестых производных — тривязкостью.

Получение дифференциальных приближений высоких порядков.

Рассматривается многопараметрический класс разностных схем метода крупных частиц для решения пространственно-трехмерных задач газовой динамики.

Система уравнений газовой динамики для трехмерных нестационарных течений записывается в виде:

$$\begin{aligned}
& \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0, \\
& (\rho u)_t + p_x + (\rho u^2)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = 0, \\
& (\rho v)_t + p_y + (\rho uv)_x + (\rho v^2)_y + (\rho vw)_z = 0, \\
& (\rho w)_t + p_z + (\rho uw)_x + (\rho vw)_y + (\rho w^2)_z = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

$$(\rho E)_t + [(p + \rho E)u]_x + [(p + \rho E)v]_y + [(p + \rho E)w]_z = 0,$$

$$p = p(\rho, J), \quad J = E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Здесь ρ — плотность, u, v, w — составляющие скорости, $p = p(K, J)$ — давление, $E, J = E - 0.5u^2$ удельные полная и внутренняя энергия. Для построения разностной схемы система уравнений (1) расщепляется на две:

$$\begin{aligned}
& \rho_t^{(1)} = 0, \rho^{(1)} u_t^{(1)} + \aleph_{u1} p_x^{(1)} = 0, \rho^{(1)} v_t^{(1)} + \aleph_{v1} p_y^{(1)} = 0, \\
& \rho^{(1)} w_t^{(1)} + \aleph_{w1} p_z^{(1)} = 0, \rho^{(1)} E_t^{(1)} + \aleph_{u2} (pu)_x^{(1)} + \aleph_{v2} (pv)_y^{(1)} + \aleph_{w2} (pw)_z^{(1)} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

и

$$\begin{aligned}
& \rho_t^{(2)} + (\rho u)_x^{(2)} + (\rho v)_y^{(2)} + (\rho w)_z^{(2)} = 0, \\
& (\rho u)_t^{(2)} + (1 - \aleph_{u1}) p_x^{(2)} + (\rho u^2)_x^{(2)} + (\rho uv)_y^{(2)} + (\rho uw)_z^{(2)} = 0, \\
& (\rho v)_t^{(2)} + (1 - \aleph_{v1}) p_y^{(2)} + (\rho uv)_x^{(2)} + (\rho v^2)_y^{(2)} + (\rho vw)_z^{(2)} = 0, \\
& (\rho w)_t^{(2)} + (1 - \aleph_{w1}) p_z^{(2)} + (\rho uw)_x^{(2)} + (\rho vw)_y^{(2)} + (\rho w^2)_z^{(2)} = 0, \\
& (\rho E)_t^{(2)} + (1 - \aleph_{u1})(pu)_x^{(2)} + (1 - \aleph_{v2})(pv)_y^{(2)} + \\
& + (1 + \aleph_{w2})(pw)_z^{(2)} + (\rho Eu)_x^{(2)} + (\rho Ev)_y^{(2)} + (\rho Ew)_z^{(2)} = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Систему (1) будем аппроксимировать следующими разностными формулами:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{i,j,k}^n &= u_{i,j,k}^n - \frac{p_{i+1,j,k}^n - p_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n} \aleph_{u1}, \\
\tilde{v}_{i,j,k}^n &= v_{i,j,k}^n - \frac{p_{i,j,k+1}^n - p_{i,j,k-1}^n}{2\Delta y} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n} \aleph_{v1}, \\
\tilde{w}_{i,j,k}^n &= w_{i,j,k}^n - \frac{p_{i,j,k+1}^n - p_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n} \aleph_{w1}, \\
\tilde{E}_{i,j,k}^n &= \aleph_{u2}(1 - \aleph_{u3}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x \rho_{i,j,k}^n} \{ p_{i+1/2,j,k}^n ([u_{i+1,j,k}^n] \aleph_{u4} + [u_{i,j,k}^n] \aleph_{u5}) - p_{i-1/2,j,k}^n ([u_{i,j,k}^n] \aleph_{u4} + \\
& + [u_{i-1,j,k}^n] \aleph_{u5}) \} - \aleph_{u2} \aleph_{u3} \frac{\Delta t}{2\Delta x \rho_{i,j,k}^n} \{ p_{i,j,k}^n [u_{i+1,j,k}^n] \aleph_{u6} + p_{i+1,j,k}^n [u_{i,j,k}^n] \aleph_{u7} - \\
& - p_{i-1,j,k}^n [u_{i,j,k}^n] \aleph_{u6} - p_{i,j,k}^n [u_{i-1,j,k}^n] \aleph_{u7} \} - \aleph_{v2}(1 - \aleph_{v3}) - \\
& - \frac{\Delta t}{2\Delta y \rho_{i,j,k}^n} \{ p_{i,j+1/2,k}^n ([v_{i,j+1,k}^n] \aleph_{v4} + [v_{i,j,k}^n] \aleph_{v5}) - p_{i,j-1/2,k}^n ([v_{i,j,k}^n] \aleph_{v4} + \\
& + [v_{i,j-1,k}^n] \aleph_{v5}) \} - \aleph_{v2} \aleph_{v3} \frac{\Delta t}{2\Delta y \rho_{i,j,k}^n} \{ p_{i,j,k}^n [v_{i,j+1,k}^n] \aleph_{v6} + p_{i,j+1,k}^n [v_{i,j,k}^n] \aleph_{v7} - \\
& - p_{i,j-1,k}^n [v_{i,j,k}^n] \aleph_{v6} - p_{i,j,k}^n [v_{i,j-1,k}^n] \aleph_{v7} \} - \aleph_{w2}(1 - \aleph_{w3}) - \\
& - \frac{\Delta t}{2\Delta z \rho_{i,j,k}^n} \{ p_{i,j,k+1/2}^n ([w_{i,j,k+1}^n] \aleph_{w4} + [w_{i,j,k}^n] \aleph_{w5}) - p_{i,j,k-1/2}^n ([w_{i,j,k}^n] \aleph_{w4} + \\
& + [w_{i,j,k-1}^n] \aleph_{w5}) \} - \aleph_{w2} \aleph_{w3} \frac{\Delta t}{2\Delta z \rho_{i,j,k}^n} \{ p_{i,j,k}^n [w_{i,j,k+1}^n] \aleph_{w6} + p_{i,j,k+1}^n [w_{i,j,k}^n] \aleph_{w7} - \\
& - p_{i,j,k-1}^n [w_{i,j,k}^n] \aleph_{w6} - p_{i,j,k}^n [w_{i,j,k-1}^n] \aleph_{w7} \},
\end{aligned} \tag{4}$$

$$p_{i+1/2,j,k}^n \frac{1}{2} - (p_{i,j,k}^n + p_{i+1,j,k}^n)$$

$$[\varphi_{i,j,k}^n] \alpha = (1 - \alpha) M_{i,j,k}^n + \alpha \tilde{M}_{i,j,k}^n, \quad \varphi = \{u, v, w, E\}$$

Для аппроксимации уравнений лагранжевого и заключительного этапов используется следующая разностная схема:

$$\begin{aligned} (\rho_{i,j,k}^{n+1} - \rho_{i,j,k}^n) \Delta x \Delta y \Delta z &= < \Delta M(\rho u) >_{i-1/2,j,k}^n < \Delta M(\rho u) >_{i+1/2,j,k}^n + < \Delta M(\rho v) >_{i,j-1/2,k}^n - \\ &- < \Delta M(\rho v) >_{i,j+1/2,k}^n + < \Delta M(\rho w) >_{i,j,k-1/2}^n - < \Delta M(\rho w) >_{i,j,k+1/2}^n, \\ (\rho_{i,j,k}^{n+1} u_{i,j,k}^n \rho_{i,j,k}^n \tilde{u}_{i,j,k}^n) \Delta x \Delta y \Delta z &= -(1 - \aleph_{u1}) - \frac{\Delta t}{2} \Delta y \Delta z (p_{i+1,j,k}^n - p_{i-1,j,k}^n + L_{i,j,k}^n(u), \\ (\rho_{i,j,k}^{n+1} v_{i,j,k}^n \rho_{i,j,k}^n \tilde{v}_{i,j,k}^n) \Delta x \Delta y \Delta z &= -(1 - \aleph_{v1}) - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \Delta z (p_{i,j+1,k}^n - p_{i,j-1,k}^n + L_{i,j,k}^n(w), \\ (\rho_{i,j,k}^{n+1} w_{i,j,k}^n \rho_{i,j,k}^n \tilde{w}_{i,j,k}^n) \Delta x \Delta y \Delta z &= -(1 - \aleph_{w1}) - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \Delta y (p_{i,j,k+1}^n - p_{i,j,k-1}^n + L_{i,j,k}^n(w), \quad (5) \\ (\rho_{i,j,k}^{n+1} E_{i,j,k}^n \rho_{i,j,k}^n \tilde{E}_{i,j,k}^n) \Delta x \Delta y \Delta z &= -(1 - \aleph_{u2})(1 - \aleph_{u8}) - \frac{\Delta t}{2} \Delta y \Delta z \cdot \{ p_{i+1/2,j,k}^n ([u_{i+1,j,k}^n] \aleph_{u9} + \\ &+ [z_{i,j,k}^n] \aleph_{u10}) - p_{i-1/2,j,k}^n ([z_{i,j,k}^n] \aleph_{u9} + [z_{i-1,j,k}^n] \aleph_{u10}) \} - (1 - \aleph_{u2}) \aleph_{u8} - \frac{\Delta t}{2} \Delta y \Delta z \{ p_{i,j,k}^n [z_{i+1,j,k}^n] \aleph_{u11} + \\ &+ p_{i+1,j,k}^n [u_{i,j,k}^n] \aleph_{u12} - p_{i-1,j,k}^n [u_{i,j,k}^n] \aleph_{u11} - p_{i,j,k}^n [u_{i-1,j,k}^n] \aleph_{u12} \} - (1 - \aleph_{v2})(1 - \aleph_{v8}) - \\ &- \frac{\Delta t}{2} \Delta x \Delta z \{ p_{i,j+1/2,k}^n ([v_{i,j+1,k}^n] \aleph_{v9} + [v_{i,j,k}^n] \aleph_{v10}) - p_{i,j-1/2,k}^n ([v_{i,j,k}^n] \aleph_{v9} + [v_{i,j-1,k}^n] \aleph_{v10}) \} - \\ &- (1 - \aleph_{v2}) \aleph_{v8} - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \Delta z \{ p_{i,j,k}^n [v_{i,j+1,k}^n] \aleph_{v11} + p_{i,j+1,k}^n [v_{i,j,k}^n] \aleph_{v12} - p_{i,j-1,k}^n [v_{i,j,k}^n] \aleph_{v11} - \\ &- p_{i,j,k}^n [v_{i,j-1,k}^n] \aleph_{v12} \} - (1 - \aleph_{w2})(1 - \aleph_{w8}) - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \Delta y \{ p_{i,j,k+1/2}^n ([w_{i,j,k+1}^n] \aleph_{w9} + [w_{i,j,k}^n] \aleph_{w10}) - \\ &- p_{i,j,k-1/2}^n ([w_{i,j,k}^n] \aleph_{w9} + [w_{i,j,k-1}^n] \aleph_{w10}) \} - (1 - \aleph_{w2}) \aleph_{w8} - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \Delta y \{ p_{i,j,k}^n [w_{i,j,k+1}^n] \aleph_{w11} + \\ &+ p_{i,j,k+1}^n [w_{i,j,k}^n] \aleph_{w12} - p_{i,j,k-1}^n [w_{i,j,k}^n] \aleph_{w11} - p_{i,j,k}^n [w_{i,j,k-1}^n] \aleph_{w12} \} + L_{i,j,k}^n(E) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_{i,j,k}^n(\varphi) &= < \Delta M(\rho u \varphi) >_{i-1/2,j,k}^n < \Delta M(\rho u \varphi) >_{i+1/2,j,k}^n + < \Delta M(\rho v \varphi) >_{i,j-1/2,k}^n + \\ &+ < \Delta M(\rho v \varphi) >_{i,j+1/2,k}^n + < \Delta M(\rho w \varphi) >_{i,j,k-1/2}^n + < \Delta M(\rho w \varphi) >_{i,j,k+1/2}^n, \\ \varphi &= \{u, v, w, E\} \end{aligned} \quad (6)$$

“Потоки” записываем в виде:

$$\begin{aligned} < \Delta M(\rho u) >_{i-1/2,j,k}^n &= < \rho(1) >_{i-1/2,j,k}^n < u(1) >_{i-1/2,j,k}^n \Delta t \Delta y \Delta z, \\ < \Delta M(\rho u \varphi) >_{i-1/2,j,k}^n &< \rho(\varphi) >_{i-1/2,j,k}^n < u(\varphi) >_{i-1/2,j,k}^n < \varphi >_{i-1/2,j,k}^n \Delta t \Delta y \Delta z, \quad \varphi = \{u, v, w, E\}, \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} < u(\varphi) >_{i-1/2,j,k}^n &= \frac{1}{2} ([u_{i-1,j,k}^n] \aleph_5^{\varphi} + [u_{i,j,k}^n] \aleph_6^{\varphi}), \quad \varphi = \{1, u, v, w, E\} \\ < \rho(\varphi) >_{i-1/2,j,k}^n &= \aleph_{u1}^{\varphi} \rho_{i-2,j,k}^n + (1 - \aleph_{u1}^{\varphi} - \aleph_{u2}^{\varphi}) \rho_{i-1,j,k}^n + \aleph_{u2}^{\varphi} \rho_{i,j,k}^n, \end{aligned}$$

если:

$$\begin{aligned} < u(\varphi) >_{i-1/2,j,k}^n &\geq 0; \\ < \varphi >_{i-1/2,j,k}^n &= \aleph_{u3}^{\varphi} [\varphi_{i-2,j,k}^n] \aleph_{u7}^{\varphi} + (1 - \aleph_{u3}^{\varphi} - \aleph_{u4}^{\varphi}) [\varphi_{i-1,j,k}^n] \aleph_{u8}^{\varphi} + \aleph_{u4}^{\varphi} [\varphi_{i,j,k}^n] \aleph_{u9}^{\varphi}, \end{aligned}$$

если: $\langle u(\varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n \geq 0$;

$$\langle \rho(\varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n = \aleph_{u1}^\varphi \rho_{i+1,j,k}^n + (1 - \aleph_{u1}^\varphi - \aleph_{u2}^\varphi) \rho_{i,j,k}^n + \aleph_{u2}^\varphi \rho_{i-1,j,k}^n$$

если: $\langle u(\varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n < 0$;

$$\langle \varphi \rangle_{i-1/2,j,k}^n = \aleph_{u3}^\varphi [\varphi_{i+1,j,k}^n] \aleph_{u7}^\varphi + (1 - \aleph_{u3}^\varphi - \aleph_{u4}^\varphi) [\varphi_{i,j,k}^n] \aleph_{u8}^\varphi + \aleph_{u4}^\varphi [\varphi_{i-1,j,k}^n] \aleph_{u9}^\varphi,$$

если: $\langle u(M) \rangle_{i-1/2,j,k}^n < 0$.

Аналогично определяются $\Delta M_{i,j-1/2,k}^n$ и $\Delta M_{i,j,k-1/2}^n$ (при этом нижний индекс при параметрах "х" принимает значения v и w соответственно).

Исследование диссипативных, дисперсионных и других свойств многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц для трехмерных течений газовой динамики проводится методом дифференциальных приближений. Вычисление дифференциальных приближений более высоких порядков является трудоемким. Поэтому была использована система аналитических вычислений REDUCE-3: На ЭВМ было вычислено 5 дифференциальных приближений. Результаты аналитических вычислений на ЭВМ ЕС-1061, ЕС-1037 для первого дифференциального приближения полностью соответствуют результатам, полученным Давыдовым Ю.М. Приведем здесь порядок выполнения действий при аналитических вычислениях на ЭВМ.

1. Вводятся как операторы произвольная функция $F(x,y,z,t)$ плотности ρ , компоненты скорости u,v,w , энергия E , а также другие функции, через которые обозначаются разложения в ряд Тейлора выше названных величин, характеризующие состояние газа.

2. Составляются процедуры для разложения произвольной функции $F(x+i\Delta x, y+j\Delta y, z+k\Delta z, t+l\Delta t)$ в ряд Тейлора по сеточным параметрам $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t, i, j, k, l$ - целые константы.

3. С помощью оператора подстановки LET величины ρ, u, v, w, E в точках, расположенных в окрестности точки, с координатами соответствующими индексам i, j, k разлагаются в ряд Тейлора. При этом используются выше составленные процедуры.

4. Проводится вычисление потоков массы, импульсов и энергии, то есть:

$$\begin{aligned} &\langle \Delta M(\rho u) \rangle_{i-1/2,j,k}^n, \langle \Delta M(\rho u) \rangle_{i+1/2,j,k}^n, \langle \Delta M(\rho v) \rangle_{i,j-1/2,k}^n, \\ &\langle \Delta M(\rho v) \rangle_{i,j+1/2,k}^n, \langle \Delta M(\rho w) \rangle_{i,j,k-1/2}^n, \langle \Delta M(\rho w) \rangle_{i,j,k+1/2}^n, \\ &L_{i,j,k}^n(M) = \langle \Delta M(\rho u \varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n - \langle \Delta M(\rho u \varphi) \rangle_{i+1/2,j,k}^n + \langle \Delta M(\rho u \varphi) \rangle_{i,j-1/2,k}^n \\ &\quad - \langle \Delta M(\rho v \varphi) \rangle_{i,j+1/2,k}^n + \langle \Delta M(\rho w \varphi) \rangle_{i,j,k-1/2}^n - \langle \Delta M(\rho w \varphi) \rangle_{i,j,k+1/2}^n. \end{aligned}$$

где $\varphi = \{u, v, w, E\}$.

Следует отметить, что при вычислении членов, возникающих из-за расщепления, создается нежесткий блок.

5. Рассматриваются разностные схемы, аппроксимирующие уравнения лагранжева и заключительного этапов (5).

При этом дифференциальные приближения уравнений неразрывности количества движения и энергии вычисляются в отдельности.

Выпишем первое и последующие дифференциальные приближения многопараметрического класса разностных схем расщепления в общем виде для пространственно-трехмерного нестационарного случая.

Рассматриваются разностные схемы (4), (5), в которых

$$\begin{aligned} <u(\varphi)>_{i+1/2,j,k}^n = \aleph_{u10}^{\varphi} [u_{i,j,k}^n] \aleph_{u12}^{\varphi} + (1 - \aleph_{u10}^{\varphi} - \aleph_{u11}^{\varphi}) [u_{i,j,k}^n] \aleph_{u13}^{\varphi} + \aleph_{u11}^{\varphi} [u_{i+1,j,k}^n] \aleph_{u14}^{\varphi}, \\ <v(\varphi)>_{i,j+1/2,k}^n = \aleph_{v10}^{\varphi} [v_{i,j,k}^n] \aleph_{v12}^{\varphi} + (1 - \aleph_{v10}^{\varphi} - \aleph_{v11}^{\varphi}) [v_{i,j,k}^n] \aleph_{v13}^{\varphi} + \aleph_{v11}^{\varphi} [v_{i,j+1,k}^n] \aleph_{v14}^{\varphi}, \\ <w(\varphi)>_{i,j,k+1/2}^n = \aleph_{w10}^{\varphi} [w_{i,j,k}^n] \aleph_{w12}^{\varphi} + (1 - \aleph_{w10}^{\varphi} - \aleph_{w11}^{\varphi}) [w_{i,j,k}^n] \aleph_{w13}^{\varphi} + \aleph_{w11}^{\varphi} [w_{i,j,k+1}^n] \aleph_{w14}^{\varphi}. \end{aligned} \quad (7)$$

Гиперболическая форма первого и последующих дифференциальных приближений имеет вид (в случае $u, v, w > 0$).

следует заменить $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ на $-\Delta x, -\Delta y, -\Delta z$;

$$\begin{aligned} \rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y + (w\rho)_z = \Delta x(u\rho_x)_x (\aleph_{u1}^1 - \aleph_{u2}^1 + \frac{1}{2}) + \Delta x(u_x\rho)_x (\aleph_{u10}^1 - \aleph_{u11}^1 + \frac{1}{2}) + \\ + \Delta y(v\rho_y)_y (\aleph_{v1}^1 - \aleph_{v2}^1 + \frac{1}{2}) + \Delta y(v_y\rho)_y (\aleph_{v10}^1 - \aleph_{v11}^1 + \frac{1}{2}) + \Delta z(w\rho_z)_z (\aleph_{w1}^1 - \\ - \aleph_{w2}^1 + \frac{1}{2}) + \Delta z(w_z\rho)_z (\aleph_{w10}^1 - \aleph_{w11}^1 + \frac{1}{2}) + \Delta t \{ \aleph_{u1}^1 [\aleph_{u10}^1 \aleph_{u12}^1 + (1 - \aleph_{u10}^1 - \aleph_{u11}^1) \aleph_{u13}^1 + \\ + \aleph_{u11}^1 \aleph_{u14}^1] \bar{p}_{xx} + \aleph_{v1}^1 [\aleph_{v10}^1 \aleph_{v12}^1 + (1 - \aleph_{v10}^1 - \aleph_{v11}^1) \aleph_{v13}^1 + \aleph_{v11}^1 \aleph_{v14}^1] \bar{p}_{yy} + \\ + \aleph_{w1}^1 [\aleph_{w10}^1 \aleph_{w12}^1 + (1 - \aleph_{w10}^1 - \aleph_{w11}^1) \aleph_{w13}^1 + \aleph_{w11}^1 \aleph_{w14}^1] \bar{p}_{zz} - \frac{1}{2} \rho_u \} + D_2^{\rho} + D_3^{\rho} + D_4^{\rho}; \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = \Delta x(uu_x\rho)_x (\aleph_{u3}^u - \aleph_{u4}^u + \frac{1}{2}) + \Delta x(uu\rho_x)_x * \\ * (\aleph_{u1}^u - \aleph_{u2}^u + \frac{1}{2}) + \Delta x(u_x u\rho)_x (\aleph_{u10}^u - \aleph_{u11}^u + \frac{1}{2}) + \Delta y(uv\rho_y)_y (\aleph_{v3}^u - \aleph_{v4}^u + \frac{1}{2}) + \\ + \Delta y(uv\rho_y)_y (\aleph_{v1}^u - \aleph_{v2}^u + \frac{1}{2}) + \Delta y(u_y v\rho)_y (\aleph_{v10}^u - \aleph_{v11}^u + \frac{1}{2}) + \Delta z(uw\rho_z)_z (\aleph_{w3}^u - \aleph_{w4}^u + \frac{1}{2}) + \\ + \Delta z(uw\rho_z)_z (\aleph_{w1}^u - \aleph_{w2}^u + \frac{1}{2}) + \Delta z(u_z w\rho)_z (\aleph_{w10}^u - \aleph_{w11}^u + \frac{1}{2}) + \Delta t \{ \aleph_{u1}^u [\aleph_{u3}^u \aleph_{u7}^u + \\ + (1 - \aleph_{u3}^u \aleph_{u4}^u) \aleph_{u8}^u + \aleph_{u4}^u \aleph_{u9}^u + \aleph_{u10}^u \aleph_{u12}^u + (1 - \aleph_{u10}^u \aleph_{u11}^u) \aleph_{u13}^u + \aleph_{u11}^u \aleph_{u14}^u] (up_x)_x + \\ + \aleph_{v1}^u [\aleph_{v3}^u \aleph_{v7}^u + (1 - \aleph_{v3}^u \aleph_{v4}^u) \aleph_{v8}^u + \aleph_{v4}^u \aleph_{v9}^u] (up_y)_y + \aleph_{u1}^u [\aleph_{u10}^u \aleph_{u12}^u + (1 - \aleph_{u10}^u - \aleph_{u11}^u) \aleph_{u13}^u + \\ + \aleph_{u11}^u \aleph_{u14}^u] (vp_x)_x + \aleph_{w1}^u [\aleph_{w3}^u \aleph_{w7}^u + (1 - \aleph_{w3}^u - \aleph_{w4}^u) \aleph_{w8}^u + \aleph_{w4}^u \aleph_{w9}^u] (up_z)_z + \aleph_{u1}^u [\aleph_{u10}^u \aleph_{u12}^u + \\ + \aleph_{u11}^u \aleph_{u13}^u + (1 - \aleph_{u10}^u - \aleph_{u11}^u) \aleph_{u13}^u + \aleph_{u11}^u \aleph_{u14}^u] (wp_x)_x - \frac{1}{2} (\rho u)_u \} + D_p^{2x} + D_p^{3x} + D_p^{4x}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (\rho v)_t + (p + \rho v^2)_y + (\rho uv)_x + (\rho vw)_z = \Delta x(uv_x\rho)_x (\aleph_{u10}^v - \aleph_{u11}^v + \frac{1}{2}) + \\ + \Delta x(uv\rho_x)_x (\aleph_{u1}^v - \aleph_{u2}^v + \frac{1}{2}) + \Delta x(u_x v\rho)_x (\aleph_{u3}^v - \aleph_{u4}^v + \frac{1}{2}) + \\ + \Delta y(vv_y\rho)_y (\aleph_{v10}^v - \aleph_{v11}^v + \frac{1}{2}) + \Delta y(vv\rho_y)_y (\aleph_{v1}^v - \aleph_{v2}^v + \frac{1}{2}) + \Delta y(u_y v\rho)_y (\aleph_{v3}^v - \aleph_{v4}^v + \frac{1}{2}) + \\ + \Delta z(wv_z\rho)_z (\aleph_{w10}^v - \aleph_{w11}^v + \frac{1}{2}) + \Delta z(wv\rho_z)_z (\aleph_{w1}^v - \aleph_{w2}^v + \frac{1}{2}) + \Delta z(w_z v\rho)_z (\aleph_{w3}^v - \aleph_{w4}^v + \frac{1}{2}) + \\ + \Delta t \{ \aleph_{u1}^v [\aleph_{u3}^v \aleph_{u7}^v + (1 - \aleph_{u3}^v \aleph_{u4}^v) \aleph_{u8}^v + \aleph_{u4}^v \aleph_{u9}^v] (up_x)_x + \aleph_{v1}^v [\aleph_{v10}^v \aleph_{v12}^v + (1 - \aleph_{v10}^v - \\ - \aleph_{v11}^v) \aleph_{v13}^v + \aleph_{v11}^v \aleph_{v14}^v] (vp_y)_y + \aleph_{v1}^v [\aleph_{v3}^v \aleph_{v7}^v + (1 - \aleph_{v3}^v \aleph_{v4}^v) \aleph_{v8}^v + \aleph_{v4}^v \aleph_{v9}^v + \\ + \aleph_{v10}^v \aleph_{v12}^v + (1 - \aleph_{v10}^v - \aleph_{v11}^v) \aleph_{v13}^v + \aleph_{v11}^v \aleph_{v14}^v] (vp_y)_y + \aleph_{w1}^v [\aleph_{w3}^v \aleph_{w7}^v + (1 - \aleph_{w3}^v \aleph_{w4}^v) \aleph_{w8}^v \end{aligned}$$

$$+ \aleph_{w4}^v \aleph_{w9}^v](wp_z)_z + \aleph_{v1}[\aleph_{w10}^v \aleph_{w12}^v + (1 - \aleph_{w10}^v - \aleph_{w11}^v) \aleph_{w13}^v + \aleph_{w11}^v \aleph_{w14}^v](vp_y)_z - \frac{1}{2}(\rho u)_u \} + D_p^{2y} + D_p^{3y} + D_p^{4y}; \quad (10)$$

$$(\rho w)_t + (\rho u w)_x + (\rho v w)_y + (p + \rho w^2)_z = \Delta x(u w_x \rho)_x (\aleph_{u10}^w - \aleph_{u11}^w + \frac{1}{2}) + \Delta x(u w \rho_x)_x * \\ * (\aleph_{u1}^w - \aleph_{u2}^w + \frac{1}{2}) + \Delta x(u_x w \rho)_x (\aleph_{u3}^w - \aleph_{u4}^w + \frac{1}{2}) + \Delta y(v w_y \rho)_y (\aleph_{v10}^w - \aleph_{v11}^w + \frac{1}{2}) + \\ + \Delta y(v w \rho_y)_y (\aleph_{v1}^w - \aleph_{v2}^w + \frac{1}{2}) + \Delta y(v_y w \rho)_y (\aleph_{v3}^w - \aleph_{v4}^w + \frac{1}{2}) + \quad (11)$$

$$+ \Delta z(w w_z \rho)_z (\aleph_{w10}^w - \aleph_{w11}^w + \frac{1}{2}) + \Delta z(v w \rho_z)_z (\aleph_{w1}^w - \aleph_{w2}^w + \frac{1}{2}) + \Delta z(v_z w \rho)_z (\aleph_{w3}^w - \aleph_{w4}^w + \frac{1}{2}) + \Delta t \{ \aleph_{u1}^w [\aleph_{u3}^w \aleph_{u7}^w + (1 - \aleph_{u3}^w - \aleph_{u4}^w) \aleph_{u8}^w + \aleph_{u4}^w \aleph_{u9}^w](up_x)_x + \\ + \aleph_{w1}[\aleph_{u10}^w \aleph_{u12}^w + (1 - \aleph_{u10}^w - \aleph_{u11}^w) \aleph_{u13}^w + \aleph_{u11}^w \aleph_{u14}^w](wp_z)_z + \aleph_{v1}[\aleph_{v3}^w \aleph_{v7}^w + \aleph_{v1}[\aleph_{v3}^w \aleph_{v7}^w + (1 - \aleph_{v3}^w - \aleph_{v4}^w) \aleph_{v8}^w + \aleph_{v4}^w \aleph_{v9}^w](vp_y)_y + \aleph_{w1}[\aleph_{w10}^w \aleph_{w12}^w + \\ + (1 - \aleph_{w10}^w - \aleph_{w11}^w) \aleph_{w13}^w + \aleph_{w11}^w \aleph_{w14}^w](wp_z)_y + \aleph_{w1}[\aleph_{w3}^w \aleph_{w7}^w + (1 - \aleph_{w3}^w - \aleph_{w4}^w) \aleph_{w8}^w + \\ + \aleph_{w4}^w \aleph_{w9}^w] + \aleph_{w10}^w \aleph_{w12}^w + (1 - \aleph_{w10}^w - \aleph_{w11}^w) \aleph_{w13}^w + \aleph_{w11}^w \aleph_{w14}^w](wp_z)_z - \frac{1}{2}(\rho w)_u \} + D_p^{2z} D_p^{3z} D_p^{4z};$$

$$(\rho E)_t + [(p + \rho E)u]_x + [(p + \rho E)v]_y + [(p + \rho E)w]_z = \Delta x(u E_x \rho)_x (\aleph_{u3}^E - \aleph_{u4}^E + \frac{1}{2}) + \\ + \Delta x(u E \rho_x)_x (\aleph_{u1}^E - \aleph_{u2}^E + \frac{1}{2}) + \Delta x(u_x E \rho)_x (\aleph_{u10}^E - \aleph_{u11}^E + \frac{1}{2}) + \Delta y(u E_y \rho)_y (\aleph_{v3}^E - \aleph_{v4}^E + \frac{1}{2}) + \\ + \Delta y(u E \rho_y)_y (\aleph_{v1}^E - \aleph_{v2}^E + \frac{1}{2}) + \Delta y(u_y E \rho)_y (\aleph_{v10}^E - \aleph_{v11}^E + \frac{1}{2}) + \\ + \Delta z(u E_z \rho)_z (\aleph_{w3}^E - \aleph_{w4}^E + \frac{1}{2}) + \Delta z(u E \rho_z)_z (\aleph_{w1}^E - \aleph_{w2}^E + \frac{1}{2}) + \Delta z(u_z E \rho)_z (\aleph_{w10}^E - \aleph_{w11}^E + \frac{1}{2}) + \\ + \frac{1}{2} \Delta t (\frac{pp}{\rho} x)_{x^1 u^1 \aleph_{u1}} + \frac{1}{2} \Delta t (\frac{pp}{\rho} y)_{y^1 v^1 \aleph_{v1}} + \frac{1}{2} \Delta t (\frac{pp}{\rho} z)_{z^1 w^1 \aleph_{w1}} + \Delta t \{ \aleph_{u1}^E [\aleph_{u10}^E \aleph_{u12}^E + (1 - \aleph_{u10}^E - \aleph_{u11}^E) \aleph_{u13}^E + \aleph_{u11}^E \aleph_{u14}^E](Ep_x)_x + \aleph_{v1}[\aleph_{v10}^E \aleph_{v12}^E + (1 - \aleph_{v10}^E - \aleph_{v11}^E) \aleph_{v13}^E + \aleph_{v11}^E \aleph_{v14}^E] * \\ * (Ep_y)_y + \aleph_{w1}[\aleph_{w10}^E \aleph_{w12}^E + (1 - \aleph_{w10}^E - \aleph_{w11}^E) \aleph_{w13}^E + \aleph_{w11}^E \aleph_{w14}^E](Ep_z)_z + [\aleph_{u3}^E \aleph_{u7}^E + (1 - \aleph_{u3}^E - \aleph_{u4}^E) \aleph_{u8}^E + \aleph_{u4}^E \aleph_{u9}^E](um)_x + [\aleph_{v3}^E \aleph_{v7}^E + (1 - \aleph_{v3}^E - \aleph_{v4}^E) \aleph_{v8}^E + \aleph_{v4}^E \aleph_{v9}^E](vm)_y + \\ + [\aleph_{w3}^E \aleph_{w7}^E + (1 - \aleph_{w3}^E - \aleph_{w4}^E) \aleph_{w8}^E + \aleph_{w4}^E \aleph_{w9}^E](wm)_z - \frac{1}{2}(\rho E)_u \} + D_2^E + D_3^E + D_4^E; \quad (12)$$

где $l_\varphi = \aleph_{\varphi 2}(1 - \aleph_{\varphi 3})(\aleph_{\varphi 4} + \aleph_{\varphi 5}) + (1 - \aleph_{\varphi 2})(1 - \aleph_{\varphi 3})(\aleph_{\varphi 9} + \aleph_{\varphi 10}) +$
 $+ \aleph_{\varphi 2} \aleph_{\varphi 3}(\aleph_{\varphi 6} + \aleph_{\varphi 7}) + (1 - \aleph_{\varphi 2}) \aleph_{\varphi 3}(\aleph_{\varphi 11} + \aleph_{\varphi 12}), \quad \varphi = \{u, v, w\},$
 $m = \aleph_{u2}(pu)_x + \aleph_{v2}(pv)_y + \aleph_{w2}(pw)_z.$

$$< \rho(\varphi) >_{i,j,k-1/2}^n = \aleph_{w1}^{\varphi} \rho_{i,j,k \pm 2}^n (1 - \aleph_{w1}^{\varphi} - \aleph_{w2}^{\varphi}) \rho_{i,j,k-1}^n + \aleph_{w2}^{\varphi} \rho_{i,j,k}^n.$$

Список литературы

1. Давыдов Ю.М. Дифференциальные приближения и представления разностных схем. – М.: МФТИ, 1981. – 131 с.