

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАДИАЛЬНО-ФАЗОВОГО ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Как известно /1, 2, 3, 4/, задача исследования и оптимизации динамики пучка заряженных частиц в различных ускоряющих и фокусирующих структурах во всем объеме представляет собой очень сложную проблему. В связи с этим возникает проблема разработки моделей динамики заряженных пучков в различных ускоряющих и фокусирующих структурах.

В данной работе рассматривается задача моделирования и оптимизации продольного и радиально-фазового движения пучков заряженных частиц в линейном ускорителе.

Процесс ускорения заряженных частиц в ускорителях описан во многих работах /3, 4, 5, 6, 7/. Отмечается, что ускоренный пучок частиц на выходе ускоряющей структуры не является моноэнергетическим. Это связано, во-первых, с неодинаковостью ускоряющих сил, действующих на частицы, проходящих зазор в разных фазах ускоряющего поля, и, во-вторых, с нестабильностью источников питания. Энергетический разброс есть явление, ограничивающее возможности применения ускоренных пучков. В связи с этим возникает проблема выбора параметров ускоряющих и фокусирующих структур, обеспечивающих на выходе минимальный разброс ускоренных частиц по энергиям и обеспечивающих при этом максимальный захват частиц по фазам.

Процесс автофазировки /3, 6/ приводит к распаду пучка в продольном направлении на сгустки, следующие друг за другом с частотой ускоряющего поля, т.е. на частицы, удовлетворяющие определенным начальным условиям и устойчиво группирующиеся в некоторой окрестности синхронной фазы высокочастотного поля. Остальные частицы, не попадающие в устойчивую область около синхронной фазы, в среднем не отбирают энергию высокочастотного поля и выбывают из процесса ускорения /3, 6/.

Необходимо также отметить, что по ходу такого процесса ускорения определенная часть заряженных частиц может быть потеряна. В связи с этим возникает необходимость увеличения количества частиц, захваченных в режим ускорения для улучшения выходных характеристик пучка на выходе ускоряющей структуры.

Для практических применений нужны ускорители, обеспечивающие на выходе пучки с минимальными поперечными размерами, заданными энергетическими и фазовыми спектрами и другими характеристиками /7/. В связи с вышесказанным возникают задачи исследования и оптимизации параметров ускоряющих и фокусирующих структур с целью получения требуемых параметров ускоренных пучков на выходе ускорителя.

Рассмотрим основные уравнения, описывающие динамику частиц в линейных ускорителях.

В процессе ускорения на частицу действует силы электромагнитного поля. Изменение импульса частицы определяется выражением

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad (1)$$

где $F = e[E + V \times B]$ - сила Лоренца, t -время, E – напряженность электрического поля, B – магнитная индукция, e – заряд частицы.

Приведем основные релятивистские соотношения, связывающие массу m , скорость v , импульс p и полную энергию W_{Π} частицы

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, P = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$W_{\Pi} = W_0 + W_k = mc^2 = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$W_0 = mc^2, \beta = v/c$$

Здесь m_0 – масса покоя частицы, β - приведенная скорость, W_0 –энергия покоя, W_k –кинетическая энергия частицы, c -скорость света.

Введя приведенную энергию $\gamma = W_{\Pi}/W_0$ и используя релятивистское соотношение $\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$, систему уравнений, описывающих продольное движение частиц, запишем в следующем виде:

$$\frac{d\gamma}{dz} = \alpha(z) \cos \varphi \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (3)$$

Где $\alpha(z) = eE_0(z) = m_0 c^2$ – параметр, характеризующий напряженность ускоряющего поля вдоль оси ускорителя, φ –фаза частиц, λ –длина волны в свободном пространстве.

Выпишем уравнение, описывающее радиальное движение частиц для случая, когда динамика рассматривается в поле стоячей волны с продольной компонентой

$E_z = E_0(z) \cos(\omega t - \varphi_0)$, где $E_0(z)$ –амплитуда напряженности электрического поля, φ_0 –начальная фаза частицы, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ –угловая частота ускоряющей волны.

При этом будем предполагать, что ускоряющее поле является аксиально-симметричным, т.е. поле в уравнение радиального движения (1) и учитывая, что сила F_r при сделанных выше предположениях имеет вид:

$$F_r = -\frac{er}{2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \right), \quad \rho_r = mr$$

и переходя к дифференцированию по z , получаем систему

$$\frac{dr}{dz} = \chi, \quad (4)$$

$$\frac{d\chi}{dz} = \left\{ \frac{\pi \alpha(z) \sin \varphi}{\lambda \sqrt{\gamma^2 - 1}} - \frac{\gamma \cos \varphi}{2(\gamma^2 - 1)} \frac{d\alpha(z)}{dz} \right\} r - \frac{\gamma \alpha(z) \cos \varphi}{\gamma^2 - 1} \chi \quad (5)$$

Здесь r - радиус, χ – dr/dz -расходимость.

Систему дифференциальных уравнений (4)-(5) представим в матричном виде:

$$\frac{dX}{dz} = P(z)X, \quad (6)$$

Где X - двумерный вектор с компонентами $x_1 = r$ и $x_2 = \frac{dr}{dz}$, $P(z)$ – матрица размерности 2×2 :

$$P(z) = \begin{pmatrix} \frac{\pi \alpha(z) \sin \varphi}{\lambda \sqrt{\gamma^2 - 1}} - \frac{\gamma \cos \varphi}{2(\gamma^2 - 1)} \frac{d\alpha(z)}{dz} & -\frac{\alpha(z) \gamma \cos \varphi}{\gamma^2 - 1} \\ \frac{\gamma \cos \varphi}{2(\gamma^2 - 1)} & \frac{\pi \alpha(z) \sin \varphi}{\lambda \sqrt{\gamma^2 - 1}} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Предположим далее, что проекция фазового объема пучка на плоскости r и r' может быть аппроксимирована с достаточной для практических целей точностью некоторым эллипсом.

Пусть множество начальных состояний пучка в плоскости (r, r') описывается эллипсом

$$X_0^* A X_0 = 1 \quad (8)$$

В силу линейности преобразования, описываемого системой дифференциальных уравнений (6), множество частиц исходного эллипса в фазовой плоскости радиуса и расходимости будет заполнять при каждом значении продольной координаты некоторый эллипс. Найдем уравнение этого эллипса. Решение системы дифференциальных уравнений (6) имеет вид:

$$X = R(z/z_0) X_0 \quad (9)$$

где $R\left(\frac{z}{z_0}\right)$ – матрицант уравнения.

Выражая X_0 из равенства (9) и подставляя его в условие (8), получаем

$$X^* R^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) A_0 R^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) X = 1.$$

Введя обозначение

$$R^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) A_0 R^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) = A(z),$$

Получаем уравнение искомого эллипса

$$X^* A(z) X = 1.$$

Обозначим:

$$S(z) = A^{-1}(z) = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

Тогда из выражения (10) следует, что

$$S(z) = R\left(\frac{z}{z_0}\right) S_0 R^*\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

Диагональные элементы матрицы $S(z)$ удовлетворяют условию /8/:

$$S_{ii}(z) = x_{i \max}^2(z), \quad i = 1, 2,$$

$$x_{1 \max}^2(z) = \max_{x_0^* A_0 x_0 = 1} r^2(z, x_0)$$

$$x_{2\max}^2(z) = \max_{x_0^* A_0 x_0 = 1} r^2(z, x_0),$$

Где x_i - максимальное отклонение по радиусу и по расходимости на множестве (9).

А матрица $S(z)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{dS(z)}{dz} = P(z)S + SP^*(z), \text{ где } P(z) \text{ — матрица, определяемая формулой (9).}$$

Учитывая равенство элементов S_{12} и S_{21} матрицы $S(z)$ и представление (7) матрицы $P(z)$, получаем

$$\frac{dS_{11}}{dz} = 2S_{12} \quad (11)$$

$$\frac{dS_{12}}{dz} = \left\{ \frac{\pi \alpha(z) \sin \varphi}{\lambda \sqrt{\gamma^2 - 1}} - \frac{\gamma \cos \varphi}{2(\gamma^2 - 1)} \frac{d\alpha(z)}{dz} \right\} dS_{11} - \frac{\gamma \alpha(z) \cos \varphi}{\gamma^2 - 1} S_{12} + S_{22} \quad (12)$$

$$\frac{dS_{22}}{dz} = 2 \left\{ \frac{\pi \alpha(z) \sin \varphi}{\lambda \sqrt{\gamma^2 - 1}} - \frac{\gamma \cos \varphi}{2(\gamma^2 - 1)} \frac{d\alpha(z)}{dz} \right\} dS_{12} - \frac{2\alpha(z) \cos \varphi}{\gamma^2 - 1} S_{22} \quad (13)$$

В этих уравнениях S_{11} — величина, характеризующая максимальное отклонение частиц пучка по радиусу, S_{12} — величина, характеризующая угол наклона главных осей эллипса фазовых состояний относительно координатных осей, S_{22} — величина, характеризующая максимальное отклонение частиц пучка по расходимости dr/dz .

Из системы (11)-(13) видно, что эти уравнения существенно зависят от фазовых переменных: энергии γ и фазы φ .

Следовательно, чтобы найти их решения, нужно присоединить к этим уравнениям уравнения (2), (3), описывающие продольное движение заряженных частиц.

Таким образом, система дифференциальных уравнений (2)-(3) и (11)-(13) описывает преобразование в фазовом пространстве переменных γ и φ эллипса начальных состояний пучка частиц по радиусу и расходимости в зависимости от фазового движения.

Отсюда видно, что полученную модель радиально-фазового движения частиц в линейном ускорителе можно эффективно исследовать, рассматривая систему (2), (3), описывающую продольное движение частиц, и систему (11)-(13), описывающую изменение огибающих по радиусу и расходимости.

Список литературы

1. Андрианов С.Н., Дымников А.Д., Осетинский Г.М. Об оптимальном управлении пучками заряженных частиц // ОИЯИ Препринт ВІ - 9 -12851. -Дубна, 1979. -24 с.
2. Капчинский И.М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. -М.: Атомиздат, 1966. -с.310.

3. Линейный ускоритель ионов. Т.І. Проблемы и теория /Под ред. Б.П. Мурина. - М.: Атомиздат, 1978.-264 с.
4. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками.-Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.-228 с.
5. Вальднер О.А., Власов А.Д., Шальнов А.В. Линейные ускорители. - Атомиздат,1969. - С. 248.
6. Власов А.Д. Теория линейных ускорителей . – М., 1965. –С. 308.
7. Рошаль А.С. Моделирование заряженных пучков. – М.,1979. – 224 с.
8. Овсянников Д.А. Математические методы оптимизации динамики пучков. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 292 с.