

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД СУЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Линейный оператор L с областью определения $D(L), D(L^-) = H$ называется максимальным, если L^- замкнут и уравнение $Lu = f \in H$ имеет решение $u \in D(L)$ для любого H .

Оператор L^- называется сужением L , если $D(L^-) \subseteq D(L)$ и при $x \in D(L^-)$ выполнено равенство $L^-x = Lx$. Сужение L^- максимального оператора L называется корректным, если уравнение $L^-u = f$ имеет единственное решение из $D(L^-)$ удовлетворяющее оценке

$$|u| \leq C|\tilde{L}u|, \quad (u \in D(\tilde{L})) \quad (1)$$

где C – не зависит от $u \in D(\tilde{L})$

Обозначим $R = \text{Ker} L = \{u: u \in D(L), Lu = 0\}$ — это множество замкнутого подпространства в H и называется ядром оператора L .

Если $R = 0$, то единственным корректным сужением L является он сам.

Теорема 1. а) Пусть L_Φ - некоторое корректное сужение L . Тогда

а) Если L^- некоторое корректное сужение L , то существует непрерывное преобразование K , действующее из H в R , и выполнено

$$\tilde{L}^{-1} = L_\Phi^{-1} + K, \quad (2)$$

б) Если K -непрерывное преобразование $K: H \rightarrow R$, то формула (2) определяет оператор, обратный к корректному сужению L .

Доказательство. Докажем а).

Возьмем $K = \tilde{L}^{-1} - L_\Phi^{-1}$. Имеем

$$LKf = L\tilde{L}^{-1}f - LL_\Phi^{-1}f = f - f = 0$$

Отсюда следует $Kf \in \text{Ker} L$. Пункт а) доказан.

Докажем б). Пусть $K: H \rightarrow R$. Так как $R \in D(L)$, имеем

$$L[L_\Phi^{-1}f + Kf] = LL_\Phi^{-1}f + LKf = f$$

Отсюда следует, что формулой (2) задается оператор, обратный к L^- -корректному сужению L , с областью определения

$$D(\tilde{L}) = \{u: u = L_\Phi^{-1}f + Kf, f \in H\}$$

Единственность решения уравнения $Lu = f$, $u \in D(L^-)$ и наличие оценки $|u| \leq C|\tilde{L}u|$, $u \in D(\tilde{L})$ тривиально. Теорема доказана.

Обычно трудно определить $R = \text{Ker} L$. Поэтому следующий результат более эффективен, чем результат теоремы 2.1.

Теорема 2. Пусть L_Φ - некоторое корректное сужение оператора L . Тогда справедливы а) и б):

а) Пусть $K: H \rightarrow D(L)$. Тогда оператор

$$L_K^{-1} f = L_\Phi^{-1} f + (E - L_\Phi^{-1} L) K f. \quad (3)$$

Есть оператор, обратный к некоторому корректному сужению LK оператора L .

б) Обратно, если L^- - некоторое корректное сужение оператора L , то существует $K: H \rightarrow D(L^-)$ такой, что верна формула (3):

$$\tilde{L}^{-1} f = L_\Phi^{-1} f + (E - L_\Phi^{-1} L) K f.$$

Доказательство. Докажем б). Утверждение б) теоремы 2 сразу вытекает из утверждения а) теоремы 1.

Докажем а). Пусть $K: H \rightarrow D(L^-)$. Определим сужение LK оператора L с областью определения

$$D(L_K) = \{u : u = L_\Phi^{-1} f + (E - L_\Phi^{-1} L) K f, f \in H\}.$$

Имеем

$$L(L_\Phi^{-1} f + (E - L_\Phi^{-1} L) K f) = L L_\Phi^{-1} f + L(E - L_\Phi^{-1} L) K f = f + L K f - L L_\Phi^{-1} L K f = f.$$

Единственность $u \in D(LK)$ и наличие оценки $|u| \leq C|f|_H$ тривиально из теоремы 2. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть L_0 - линейный минимальный оператор. Тогда L_0^* - будет максимальным линейным оператором (в случае, когда они рассматриваются в гильбертовом пространстве H). Предположим, что $D(L_0) \subseteq D(L)$, $L y = L_0 y$ при $y \in D(L_0)$ и уравнение $L y = f \in H$ имеет единственное решение $y \in D(L)$.

Из включения $L_0 \subseteq L$ вытекает $L_0^* \supseteq L^*$. Так как L - обратимый и $D(L^{-1}) = H$, то L^{*-1} - также обратим и оператор $D(L^{*-1}) = H$. Следовательно L^* - есть линейное корректное сужение L_0^* . Обратно, имея линейное корректное сужения оператора L_0^* , переходя к сопряженным, получаем корректное расширение L_0 .

Таким образом, умея описывать линейные корректные сужения, получаем возможность описывать корректные расширения линейного минимального оператора.

Список литературы

1. Отелбаев М. Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского. // Доклады АН СССР. - № 4, 265, 1982. - С.815-819.

2. Отелбаев М. Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К теории сужений и расширений операторов //Изв. АН КазССР. – Сер. физ.-мат. – № 5. – 1982. – С.24-26.
3. Отелбаев М. Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов //Доклады АН СССР. – № 4, 271. – 1983. – С.1307-1311.
4. Херминдер Л. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1965.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – С.512.
6. Соболев В.И., Люстерник Л.А. Функциональный анализ. – М., 1965.