УДК 531.3-7

МЕТОДЫ СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ТЕЧЕНИЯМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДАХ

Бийбосунов А.И., Жангазиева Г.А.
КГТУ им. И. Раззакова

В статье рассматривается проблема гидродинамической нестабильности вязкой сжимаемой жидкости в условиях высоких давлений и сложных горных рельефов. Особое внимание уделено переходу ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое на вогнутых поверхностях трубопроводов, где под действием центробежных сил возникают вихри Гертлера. Приведены основные уравнения, описывающие течение жидкости, включая уравнения Навье–Стокса, уравнение неразрывности и термодинамические соотношения. Для решения задач использованы методы асимптотического анализа и численного моделирования. Исследованы условия устойчивости пограничного слоя и сформулирована краевая задача для трёхмерного течения.

Ключевые слова: гидродинамическая неустойчивость, пограничный слой, сжимаемая вязкая жидкость, турбулентность, течение в трубопроводах

ТҮТҮКТӨРДӨГҮ КЫСЫЛУУЧУ СУЮКТУК АГЫМДАРЫНА КАРАТА БИРИКТИРИЛГЕН АСИМПТОТИКАЛЫК АЖЫРОО ЫКМАЛАРЫ

Бийбосунов А.И., Жангазиева Г.А.
И. Раззаков атындагы КМТУ

Макалада жогорку басымдын шарттарында жана татаал тоолуу рельефтерде кысылып турган илешкек суюктуктардын гидродинамикалык туруксуздугунун проблемасы каралган. Түтүк өткөргүчтөрдүн ойгон беттеринде чек ара катмарында ламинардан турбуленттүү агымга өтүүгө өзгөчө көңүл бурулат, мында борбордон четтөөчү күчтөрдүн таасиринен Гортлер куюндары пайда болот. Суюктуктун агымын сүрөттөгөн негизги теңдемелер, анын ичинде Навье-Стокс теңдемелери, үзгүлтүксүздүк теңдемеси жана термодинамикалык

байланыштар берилген. Маселелерди чечүү үчүн асимптотикалык анализ жана сандык моделдөө ыкмалары колдонулат. Чек ара катмарынын туруктуулук шарттары талданып, үч өлчөмдүү агым үчүн чектик маселе түзүлгөн.

Баштапкы сөздөр: гидродинамикалык туруксуздуктар, байланыш катмары, кысылып туруучу илешкектүү суюктук, турбуленттүүлүк, түтүктөрдөгү агым

METHODS OF COLLECTIVE ASYMPTOTIC EXPANSIONS WITH APPLICATION TO COMPRESSIBLE FLUID FLOW IN PIPELINES

Biybosunov A.I., Zhangazieva G.A.
KSTU named after I.Razzakov

The article addresses the problem of hydrodynamic instability of compressible viscous fluids under high-pressure conditions and complex mountainous terrains. Special attention is given to the transition from laminar to turbulent flow in the boundary layer on concave surfaces of pipelines, where Görtler vortices arise due to the influence of centrifugal forces. The main equations describing fluid flow, including the Navier–Stokes equations, the continuity equation, and thermodynamic relations, are presented. Methods of asymptotic analysis and numerical modeling are employed to solve the problems. The stability conditions of the boundary layer are analyzed, and a boundary value problem for three-dimensional flow is formulated.

Keywords: hydrodynamic instability, boundary layer, compressible viscous fluid, turbulence, flow in pipelines

Вопросы течения вязкой жидкости вызывают практическую значимость и актуальность в газопроводах высокого давления в горных условиях. В этом случае возникает необходимость исследования вопросов перехода ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое при течении в трубопроводах в сложных горных рельефах, где возможны случаи обтекания вогнутой поверхности трубопровода потоком газа.

В таких случаях важным фактором, вызывающей неустойчивость течения жидкости и газа в пограничном слое, выступают вихри Гертлера. В таких случаях, что подтверждено экспериментально, вблизи вогнутой поверхности вихри начинают терять свою устойчивость, возникает эффект их всплывания верх по потоку, что при определенных скоростных и температурных диапазонах оказывают механическое воздействие на обтекаемую поверхность.

Данные процессы описываются системой дифференциальных уравнений Навье – Стокса. Так для течений вязкой сжимаемой жидкости:

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{dt} &= F_X - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}divW\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right],\\
\rho\frac{Dv}{dt} &= F_Y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}divW\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right],\\
\rho\frac{Dw}{dt} &= F_Z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}divW\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right].
\end{aligned}\right\}$$

К этим уравнениям следует присоединить еще уравнение неразрывности, которое в раскрытой форме имеет для течений сжимаемой жидкости следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Однако, для исследования течений сжимаемой жидкости уравнений Навье – Стокса и уравнения неразрывности недостаточно. В самом деле, изменения давления и плотности, происходящие в сжимаемых течениях, влекут за собой изменения температуры, что приводит к необходимости ввести в рассмотрение некоторые термодинамические соотношения. Первым таким соотношением является уравнение состояния, связывающее между собой давление, плотность и температуру. Для совершенного вязкого газа уравнение состояния имеет вид:

$$P - \rho RT = 0$$

где R – есть постоянная, а T – абсолютная температура. Далее, когда изменение состояния происходит неизотермический, тогда необходимо использовать еще одно термодинамическое соотношение – уравнение энергии, которое выражает баланс теплоты и механической энергии (первое начало термодинамики) и представляет собой дифференциальное уравнение для распределения температуры. И, наконец, необходимое последнее соотношение – это эмпирическая связь μ (T) между коэффициентом вязкости μ и температурой T.

$$div\vec{W} = 0\,,\quad \mu = const$$

Течения реальной жидкости резко отличаются от ламинарных течений. Они обладают некоторым особым свойством, которое назвали турбулентностью. При возрастании числа Рейнольдса в течениях реальной жидкости, например, в трубах и каналах, происходит отчетливо выраженный переход ламинарной формы течения в турбулентную. Этот переход ламинарного течения в турбулентное течение, называемый также возникновением турбулентности, имеет фундаментальное значение для всей гидроаэродинамики. Значительно позднее было установлено, что течение в пограничном слое также может быть ламинарным, либо турбулентным. В этом случае все поведение течения около обтекаемого тела, в частности, и силовое воздействие течения на тело, существенно зависит от того, является ли пограничный слой ламинарным или турбулентным. Переход течения в пограничном слое на обтекаемом теле из ламинарной формы в турбулентную зависит от многих факторов, из которых, кроме числа Рейнольдса, являются наиболее важными влияние градиента давления, сжимаемости, отсасывания, теплопередачи и т.д. Мы же остановимся на рассмотрении устойчивости пограничного слоя при трехмерных возмущениях, а именно, в пограничных слоях на вогнутых поверхностях.

Пусть вогнутая поверхность с постоянным радиусом кривизны обтекается равномерным потоком вязкой жидкости при больших, но докритических числах Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = u_\infty L / \vartheta \approx \varepsilon^{-2}$$

здесь – скорость потока, *L* – некоторая характерная длина, измеряемая вдоль вогнутой поверхности в направлении течения, υ – коэффициент кинематический вязкости. Тогда в этом случае плоское течение в основной части является невязким, а вблизи вогнутой поверхности, согласно теории Прандтля, имеется ламинарный пограничный слой. Но, в то время, как в пограничных слоях на выпуклых стенках центробежные силы оказывают стабилизирующее действие, правда, повышая предел устойчивости только незначительно, в пограничных слоях на вогнутых стенках эффект центробежных сил противоположен. Они приводят, как впервые показал Гертлер, к неустойчивости, сходной с неустойчивостью при течении между вращающимися коаксиальными цилиндрами. Таким образом, основное плоское течение вблизи вогнутой поверхности нарушается, теряет устойчивость, и тогда около поверхности возникают стационарные, вытянутые в продольном направлении вихревые жгуты – вихри Гертлера, и течение из плоского становится пространственным. Ниже мы будем строить стационарное решение Навье – Стокса для пространственных областей возмущенного течения при:

$$Re \to \infty \Leftrightarrow \varepsilon \to 0$$

Используется криволинейная ортогональная система координат X, Y, Z, где ось X направлена вдоль вогнутой поверхности в направлении течения, ось Y – по нормали к поверхности, а ось Z – перпендикулярно к плоскости (X, Y). В выбранной системе координат уравнение Навье – Стокса могут быть записаны в безразмерной форме в следующем виде:

$$\frac{1}{1-Ky}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{Kv}{1-Ky}=0$$

$$\frac{u}{1-Ky}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{Kuv}{1-Ky}+\frac{1}{1-Ky}\frac{\partial P}{\partial x}=$$

$$=\varepsilon^2\left[\frac{1}{(1-Ky)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{K}{1-Ky}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{2K}{(1-Ky)^2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{K^2 u}{(1-Ky)^2}\right]$$

$$\frac{u}{1-Ky}\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{Ku^2}{1-Ky}+\frac{\partial P}{\partial y}=$$

$$=\varepsilon^2\left[\frac{1}{(1-Ky)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{K}{1-Ky}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{2K}{(1-Ky)^2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{K^2 v}{(1-Ky)^2}\right]$$

$$\frac{u}{1-Ky}\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial z}=\varepsilon^2\left[\frac{1}{(1-Ky)^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{K}{1-Ky}\frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

Вывод краевой задачи для вязкой сжимаемой жидкости является сложной областью исследований из-за сложной и нелинейной природы потоков жидкости. В частности, гидродинамическая нестабильность потока в поле центробежных сил является критической областью исследований, поскольку это может привести к значительным изменениям профилей скорости и давления жидкости. Асимптотический анализ уравнений Навье-Стокса для вязкой сжимаемой жидкости обычно выполняется с использованием математических методов, таких как анализ возмущений и численное моделирование. Анализ возмущений, - это математический метод, который включает линеаризацию уравнений Навье-Стокса для получения приближенных решений.

Тогда справедливо вывести следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\alpha\rho_0 u_\alpha+\alpha u_0 R_\alpha+\rho_0 v'_\alpha+v_\alpha\rho'_0-\rho_0 w_\alpha=0$$

$$\alpha u_0 u_\alpha+v_\alpha u'_0=0$$

$$\beta(\alpha u_0 v_\alpha+2u_0 u_\alpha)(1/\rho_0)\mathrm{P}_\alpha u'_0-(R_\alpha/\rho_0^2)\mathrm{P}'_0=0$$

$$(1/\rho_0)\mathrm{P}'_0=-u_0^2$$

$$\alpha u_0 w_\alpha+(1/\rho_0)\mathrm{P}_\alpha=0,$$

$$\alpha u_0 G_\alpha+v_\alpha H'_0=0$$

$$H_0=(\gamma-1)(1/\rho_0 M_\infty^2)+u_0^2/2$$

$$G_\alpha=-(1/\gamma-1)M_\infty^2)R_\alpha/\rho_0^2+u_0 u_\alpha$$

$$\rho_0=M_0^2(u_0^2 M_\infty^2)\rho_0=\rho'_0 v_1(\alpha u_0)$$

$$H_0=(\gamma-1)(1/\rho_0 M_\infty^2)+u_0^2/2\,.$$

Введя дополнительную переменную:

$$z = u_\alpha / u'_0$$

можно упростить и получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.8) к одному дифференциальному уравнению:

$$z'' + 2z'(\frac{M'_0}{M_0}) + z(-\beta + 2(\frac{M'_0}{M'_0\alpha^2})) = 0$$

со стандартными начальными и граничными условиями:

$$v_1(0) = 0,\ v_1(\infty) = 0$$

$$z(\infty) = 0\,, \qquad z(0) = const.$$

В заключении методом асимптотических разложений применительно к системе уравнений Навье-Стокса сформулирована трехмерная краевая задача с соответствующими граничными условиями при набегающем течении вогнутой поверхности потоком вязкой сжимаемой жидкости в трубопроводах при сложных горных рельефах вблизи пограничного слоя при больших значениях давления и соответственно скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя [Текст] / Г. Шлихтинг. – М.: Ин.лит, 1960.
2. Бийбосунов, А.И. Асимптотический анализ и вывод краевой задачи уравнений Навье – Стокса для вязкой сжимаемой жидкости гидродинамической неустойчивости течения в поле центробежных сил [Текст] / Сборник современные проблемы механики сплошных сред / А.И. Бийбосунов, А.Б. Чечейбаев, А.К. Орозобекова, А.А. Ташиев // – Бишкек, 2010. – № 12. – С. 56-61.