

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПРЕПЯТСТВИЕ

Рассматривается плоское течение идеальной, несжимаемой жидкости в канале с дном, имеющим препятствие в виде трапеции (рис. 1).

Подобные задачи решались многими авторами как для случая тяжелой жидкости, так и для случая идеальной жидкости [1; 2; 3; 4; 6], причем при отсутствии препятствия ABCG (прямоугольник) и $\alpha = -\pi/2$ имеем задачу Н.Е. Кочина, течение по дну с уступом.

Н.Е. Кочин, М.И. Гуревич, Э. Дуйшеев и другие авторы, рассматривая течение тяжелой жидкости, рассчитывали влияние силы тяжести.

Задача Н.Е. Кочина для случая идеальной жидкости с эффектом кавитации решена В.И. Степановой [4]. Схема рассмотренного ею течения в предположении, что за уступом образуется зона разрежения, аналогичная каверне за обтекаемым препятствием, изображена на рис. 2.

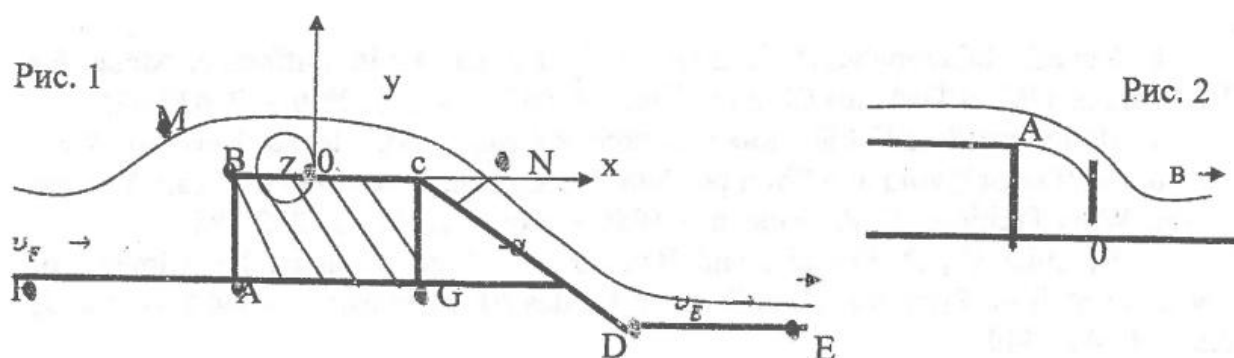


Рис. 1. Картина течения в физической плоскости $z = x + iy$

В ряде работ М.Ю. Абдылдаева используется кавитационное обтекание препятствий ограниченным потоком [2]. В этих работах он решает задачи кавитационного обтекания препятствий в виде прямоугольника, расположенного на краю уступа (водослива с широким порогом).

Моделирование подобных объектов достаточно широко встречается в гидротехнических разработках, а именно в расчетах гидротехнических сооружений, в теории кумулятивных зарядов и других гидравлических машин.

Перейдем к решению поставленной задачи методом Н.Е. Жуковского, уже рассмотренной Э. Дуйшеевым [3] задачи о течении тяжелой жидкости через препятствие, схема которой изображена на рис. 1. При этом предположим, что жидкость невесома, идеальна и несжимаема.

Для решения задачи отобразим области изменения $dw/(V_0 dz)$ и W на верхней полуплоскости параметрического переменного $t[Ymt \geq 0]$ (рис. 4).

Пусть на одной граничной линии тока FABCDE функция тона $\psi=0$, а на другой граничной линии тона FMNE $\psi=q$. На поверхности потока FMNE абсолютная величина скорости равна V_0 .

При движении вдоль линий тока потенциал скорости ϕ , очевидно, меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

Таким образом, областью изменения W является полоса (рис. 3) шириной q . Отображение этой полосы на верхнюю полуплоскость переменной t (рис. 4) осуществляется с помощью функции

$$W(t) = \frac{q}{\pi} \ln t. \quad (1)$$

Действительно, на FMNE мнимая часть w равна $+q$, а действительная меняется от $-\infty$ в точке $t=0$ до $+\infty$ в точке $t=+\infty$. При обходе точки $t=0$ по бесконечно малой полуокружности против часовой стрелки (рис. 4) комплексный потенциал изменяется скачком на $q \cdot i$ и вдоль FMNE, комплексный

потенциал $w = \frac{q}{\pi} \ln |t| = \phi$ будет действительным, причем ϕ будет изменяться от $-\infty$ в точке $t=0$ до $+\infty$ в точке $t=\infty$. В верхней полуплоскости w аналитична. Формула (1) получена с помощью формулы Кристоффеля Шварца, рассматривая полосу как двуугольник.

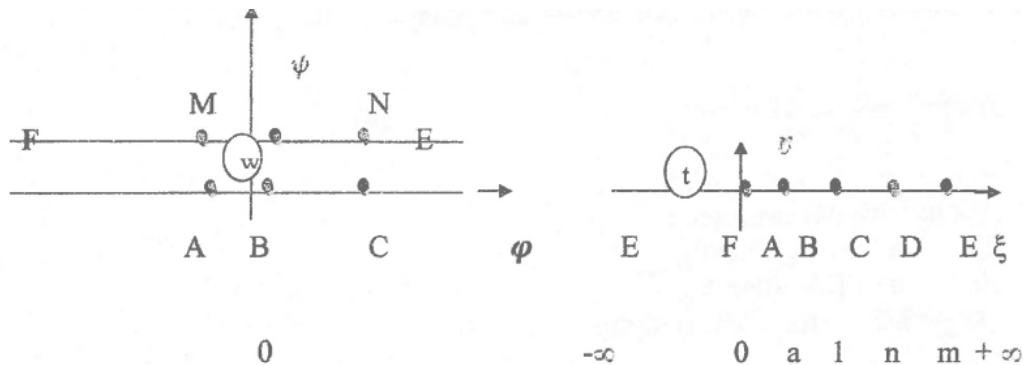


Рис. 3. Область течения в плоскости $w=\phi+i\psi$. Рис. 4. Параметрическая плоскость $t=\xi+i\eta$.

Найдем теперь функцию

$$u^v = \ln \zeta = - \ln \frac{dw}{V_0 dz} = - \ln \frac{v}{V_0} + i\theta; \quad (2)$$

где $\zeta = \frac{dw}{V_0 dz}$, v_0 - скорость на поверхности потока (FMNE), θ - угол скорости с осью абсцисс X .

При отображении области течения на плоскости Жуковского имеем двулистную область. Ввиду сложности отображения двулистной области в

верхней полуплоскости t применим интеграл Шварца для верхней полуплоскости /5/

$$f(z) = \frac{1}{\pi+i} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi) \frac{d\xi}{\xi-z} + iC, \quad (3)$$

где $U(\xi)$ - известные значения вещественной части функции на действительной оси $t=\xi$, C – действительная постоянная.

Введем связанную с функций Жуковского новую функцию /5/

$$\Omega(t) = \frac{\omega \sqrt{t}}{i \sqrt{t}} - \frac{\theta}{\sqrt{t}} - i \frac{1}{\sqrt{t}} \ln \frac{v_c}{v} \quad (4)$$

Для нашего случая имеем:

$$\begin{aligned} 0 & \text{ на EF } (-\infty < \xi < 0), \\ 0 & \text{ на EA } (0 < \xi < a), \\ \operatorname{Re} \frac{\omega}{i \sqrt{t}} = \pi/2 & \text{ на AB } (a < \xi < 1), \\ 0 & \text{ на BC } (1 < \xi < n), \\ -\alpha & \text{ на CD } (n < \xi < m), \\ 0 & \text{ на DE } (m < \xi < +\infty). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив $\theta/t^{1/2}$ из (5) а (4) и произведя интегрирование, получим:

$$\omega(t) = \ln \left(\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} * \frac{\sqrt{a}+\sqrt{t}}{\sqrt{a}-\sqrt{t}} \right)^{1/2} * \left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{t}}{\sqrt{m}-\sqrt{t}} * \frac{\sqrt{n}-\sqrt{t}}{\sqrt{n}+\sqrt{t}} \right)^{\alpha/\pi} \quad (6)$$

(здесь $C=0$, так как $\omega/i * t^{1/2} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$). Параметры a, n, m , и l – абсциссы точек на действительной оси t (рис. 4).

Формула (6) допускает прямую проверку. Очевидно, при $(0 < t < a)$ имеем $Ym\omega=0$, при $(a < t < 1)$, $Ym\omega=\pi/2$, при $(1 < t < n)$ - $Ym\omega=0$, при $(n < t < m)$ имеем $Ym\omega=-\alpha$, при $(m < t < +\infty)$, $Ym\omega=0$ и, наконец, при $(-\infty < t < 0)$ имеем $Ym\omega=0$.

Из (1) и (6) следует, что

$$z(t) = \frac{a}{\pi * v_0} * \int_1^t \left(\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} * \frac{\sqrt{a}+\sqrt{t}}{\sqrt{a}-\sqrt{t}} \right)^{1/2} * \left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{t}}{\sqrt{m}-\sqrt{t}} * \frac{\sqrt{n}-\sqrt{t}}{\sqrt{n}+\sqrt{t}} \right)^{\alpha/\pi} * \frac{dt}{t}. \quad (7)$$

Формулы (1) и (7) дают общее решение задачи в параметрической форме.

Используя формулу (7), можно найти все геометрические элементы течения, такие как размеры препятствия, а также уравнение линии тока FMNE, где точки M и N являются точками перегиба линии.

Для нахождения линии тока FMNE (рис.1) достаточно проинтегрировать (7) вдоль этой линии и, отделив действительную и мнимую части, найти уравнение линии тока в параметрическом виде.

Список литературы

1. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. – М., 1961.
2. Абдылдаев М.Ю. Плоские задачи теории струй идеальной жидкости. – Бишкек: Илим, 1999.
3. Дуйшеев Э. Исследование по теории водосливов //Изв. вузов. Математика. – 1958. – № 2(3),
4. Степанова В.И. Применения кавитационной схемы Эфроса-Гильберга к исследованию течения жидкости через уступ. – М.:МОИП, секция физики, 1972.
5. Лаврентьев М.А и Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.-Л., 1951.
6. Кочин Н.Е. О движении тяжелой жидкости в канале с дном, имеющим уступ. //Собр.соч. – М.:Изд-во АН СССР, 1949.