

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ И СОЛЕЙ В ПОЧВОГРУНТАХ И ЕГО ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Борьба с засолением почвогрунтов имеет большую актуальность, остроту и по сегодняшний день. Известно, что на процесс засоления почвогрунтов влияют множество факторов окружающей среды. Для успешного исследования процесса рассоления почвогрунтов необходимо выделить главные факторы, обуславливающие направленность процессов «засоления-рассоления». Таких факторов три: интенсивность испарения, интенсивность фильтрации, энергия потока грунтовых вод. Не останавливаясь подробно на этих факторах, знаем, что они зависят от климата, типа почв, растительности, глубиной залегания и энергией потока грунтовых вод, хозяйственной деятельностью человека. Все эти факторы можно исчислять численно, т.е. миграцию солей в почвогрунтах можно рассматривать и с количественной стороны. Математическое описание движения солей в почвогрунтах даны в работах [1, 2, 3, 4], а также в исследованиях других авторов. В этих работах рассматриваются существующие математические модели процессов солепереноса в почвогрунтах, критический анализ научных исследований по вопросам конвективной диффузии, сорбции и ионного обмена в горных породах. Изучены некоторые модели дифференциальные уравнения, которые описывают процессы миграции различных солей, приводятся методы определения необходимых параметров. Причем экспериментальные и лабораторные наблюдения свидетельствуют о недопустимости пренебрежения определенными динамическими факторами, обуславливающими нестационарность процесса движения воды и солей в почвогрунтах.

Нестационарное движение солей в пористой среде при неустановившемся движении воды, описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial t} \operatorname{div} v (D(H) \operatorname{grad} H) + v \frac{\partial H}{\partial x} = F; \quad (1)$$

$$P(v, H) = \operatorname{grad} H; \quad (2)$$

$$n \frac{\partial C}{\partial t} \operatorname{div} v (D(v) \operatorname{grad} C) - \operatorname{div} v (v \cdot c) + \beta(v)(C_m - C), \quad (3)$$

здесь n – активная пористость, $D(v)$, $\beta(v)$ – коэффициенты конвективной диффузии и скорости растворителя, которые зависят от скорости фильтрации v , C и C_m – концентрации солей и предельного насыщения, t – рассматриваемый промежуток времени.

Уравнения (1) и (2) описывают гидродинамическую картину течения в пористой среде. В случае насыщенной фильтрации уравнение (1) представляет

собой нелинейное уравнение неустановившейся безнапорной фильтрации относительно функции пьезометрического напора h (уравнение Буссинеска). В этом случае: $D(H) = \frac{k}{\delta} H$, $H=h$, где k – коэффициент фильтрации, δ – водоотдача или недостаток насыщения грунта, $b=0$, F – функция, учитывающая влияние источников и стоков.

При ненасыщенной фильтрации уравнение (1) представляет собой нелинейное уравнение влагопереноса. В этом случае H – влажность, $D(H)$ – коэффициент диффузии, а последние два слагаемые учитывают влияние гравитации и источников или стоков. При фильтрации в ненасыщенной пористой среде уравнение (2) выражает связь, не обязательно линейную, между градиентом пьезометрического напора h и скоростью фильтрации v . Здесь скорость течения не принимается постоянной или заданной переменной величиной, она определяется посредством решения начально-краевой задачи. Третье уравнение (3) описывает диффузию растворимого вещества.

Для рассматриваемой системы уравнений (1-3) нестационарного одномерного случая определим его решение со следующим начально-краевыми условиями:

$$H(x, t)|_{t=0} = H_0(x), \quad C(x, t)|_{t=0} = C_0(x), \quad (4a)$$

$$\left\{ \alpha_{1,p}(t) \cdot H(x, t) + z_{1,p}[t, H(x, t)] \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right\} \Big|_{x=dp(t)} = H_p(t), \quad (4б)$$

$$\left\{ \alpha_{2,p}[t, v(x, t)] C(x, t) + z_{2,p}[t, C(x, t)] \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right\} \Big|_{x=dp} = C_p(t), \quad (4в)$$

$$P = 0; 1, \quad dp = \begin{cases} 0 & \text{при } P = 0 \\ L & \text{при } P = 1. \end{cases}$$

Решение системы уравнений (1-4) эффективно возможно с помощью неявного конечно-разностного метода, а коэффициенты при α, z в начально-краевых условиях (4б-4в) задаются различным образом, в зависимости от конкретных условий на границах опресняемого массива.

Программа рассчитана как на решение двух уравнений в частных производных (1,2) с условиями (4), так и на решение системы трех уравнений (1,2,3) – при краевых условиях (4). Такая структура программы позволяет вносить изменения в исходные значения, связанную с гидродинамическими уравнениями, не затрагивая уравнения конвективной диффузии. Эта же программа позволяет решать уравнение рассоления (3) и при постоянной скорости фильтрации. Указанные особенности данной программы учитывают различные режимы фильтрации. Расчеты, проводившиеся при различных

краевых условиях, показывают устойчивость разностной схемы и ее достаточную точность.

Численная реализация начально-краевой задачи проводилась при следующих значениях параметров уравнений (1-3):

$$H(x, t)|_{t=0} = p_1 x + p_2, \text{ где } p_1 > p_2 \text{ некоторые const, } c(x, t)|_{t=0} = \text{const}; \quad (5a)$$

$$\begin{cases} H(x, t)|_{x=0} = p_2 \\ H(x, t)|_{x=p} = p_1 p + p_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[v(x, t) - D \frac{\partial C}{\partial x} \right]_{x=0} = C_1 \cdot v(0, t), \text{ где } C_1 = \text{const.} \\ \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=p} = \text{const.} \end{cases} \quad (5b)$$

Численно определяли понижение концентрации солей по времени на различных отметках x , определяемого массива. На рис.1. и рис.2. изображены графики понижения концентрации солей на различных отметках, опресняемого массива в случае, когда константа скорости растворения β положена равной и не равной нулю, соответственно. Во втором случае заметна большая скорость изменения концентрации солей. На рис. 3 указана соответствующая рис.1 и 2 динамика пьезометрического напора.

Рассмотренная система уравнения параболического типа (1-3), описывающая конвективную диффузию солей в почвогрунтах, не отражает многих важных явлений гидродинамического и физико-механического характера, формирующих в совокупности сложный механизм переноса солей в почвогрунтах. Поэтому полный учет гидрофизических явлений, сопровождающих движение солей в почвогрунтах, приводят к системам дифференциальных уравнений, содержащих операторы параболического и гиперболического типа одновременно.

Во второй части этой работы, нами рассматривается моделирование влагопереноса в зоне аэрации при периодических поливах, при выпадении осадков на орошаемых территориях, для которых наиболее характерен периодический режим увлажнения поверхности земли. За период полива или выпадения осадков промачиваются почвенный и подпочвенный слои, имеющие обычно повышенную проницаемость, после чего происходит перенос влаги под действием гравитационных и капиллярных сил с учетом испарения.

Для описания влагопереноса в вертикальном направлении, обычно используют дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial k}{\partial x}, \quad (6)$$

где $D(w), k(w)$ – коэффициенты диффузии и влагопроводности, причем существенно нелинейно зависят от влажности w .

В настоящее время, существует ряд экспериментальных и теоретических зависимостей этих параметров от влажности. С.Ф. Аверьянов предлагает следующую зависимости:

$$K = K_{\phi} \bar{W}^n, \quad \bar{W} = \frac{W - W^*}{W_H - W^*}, \quad n = 3-4, \quad (7)$$

где W_H – влажность при полном насыщении, W^* – влажность, при котором коэффициент фильтрации практически равен 0, K_{ϕ} – коэффициент фильтрации при полном насыщении.

Экспериментальными данными ученых показано также, что коэффициенты влагопереноса и влагопроводности могут быть записаны в виде экспоненциального закона

$$k = k_0 \exp[\alpha(w - w_0)], \quad D = D_0 \exp[\beta(w - w_0)] \quad (8)$$

при этом k_0, D_0, β – постоянные, определяемые экспериментальным путем. При численном решении уравнения (6) рассматривается пример при периодических поливах с заданием следующих параметров рассматриваемой задачи: при поливе нормой $600 \text{ м}^3/\text{га}$, при начальной влажности $W_0 = 0.22$, происходит промачивание на глубину 1 м. Среда считается гомогенная, для k и D используется зависимости (8), в которых:

$$\begin{aligned} \alpha = 40, \quad \beta = 20, \quad w = 0.22 - 0.3: \quad \frac{k_0}{D_0} = 0.01, \quad k_{\text{ср}} = 1.5 \text{ м/сут.} \\ \alpha = 84, \quad \beta = 72, \quad w = 0.3 - 0.36: \end{aligned} \quad (9)$$

$Y = 0.1 \text{ м/сут.}$ – в граничном условии на поверхности почвы.

Полученные графики распределения влажности по глубине в разные моменты времени указаны на рис.4. Такие расчеты для поливов, проводимых через 15 суток, позволили установить, что в зоне аэрации изменение влагозапасов в долях от питания составляет: 38% – после I-го полива, 25% – после II-го полива, 14 % – после III-го полива, что свидетельствует об увеличении роли испарения при повторных поливах.

Проведены численные расчеты для гетерогенной среды, а верхний слой глубиной 1 м остается однородным. Полученные результаты, представленные на рис. 4, показывают, что влияние гетерогенности среды оказывается существенным, заметно увеличивая глубину проникновения инфильтрующей воды при некотором уменьшении влагозапасов.

Решение нелинейного уравнения влагопереноса (6) очень сложно ввиду его сложной зависимости коэффициентов влагопереноса и влагопроводности. Поэтому несомненным интерес представляет его линеаризация, анализ возможностей таких линеаризаций. Решение нелинейного уравнения (6) очень сложно, поэтому приведем это уравнение к линеаризованному виду:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_0 \frac{\partial w}{\partial x} \quad (10)$$

где $D_0 = k_0 \Psi_0$. K_0 – const. Существуют различные приложения по способам осредненных величин D_0 и K_0 , из которых наибольшее распространение имеет способ линеаризации в средней точке, когда при изменении влажности от w_1 до w_2 в течение расчета всей задачи принимается:

$$D_0 = \frac{1}{w_2 - w_1} \int_{w_1}^{w_2} k \psi \, dw \approx \frac{1}{w_2 - w_1} \int_{w_1}^{w_2} D \, dw; \quad K_0 = \frac{1}{w_2 - w_1} \int_{w_1}^{w_2} k^1 \, dw \quad (11)$$

Второй способ, которым проводили расчет уравнения (10), когда D_0, K_0 принимаются в каждый момент времени в такой точке, где интенсивность изменения влажности оказывается наибольшей, а при расчетах на период времени от 0 до t значения осредненных параметров определяются как средневзвешенные во времени, то есть

$$D_0 = \frac{1}{t} \int_0^t D_{\max} \, dt \approx \frac{1}{t} \sum_0^t D_{\max} \, \Delta t; \quad K_0 = \frac{1}{t} \int_0^t K'_{\max} \, dt \approx \frac{1}{t} \sum_0^t K'_{\max} \, \Delta t. \quad (12)$$

Численное решение вышеуказанной линеаризованной задачи приведено и построен график распределения влажности на рис.5.

Сопоставление результатов, подсчитанных двумя способами, показывает, что при линеаризации первым способом (в средней точке) расхождение с расчетам нелинейного уравнения составляет 7% при $t=5$ суткам и 13% при $t=10$ суткам при линеаризации вторым способом по среднему из минимальных значений. Это расхождение равно 5% при $t=5$ суткам, и 2% – при $t=10$ суткам. Таким образом, линеаризация дала удовлетворительные результаты, особенно во втором случае.

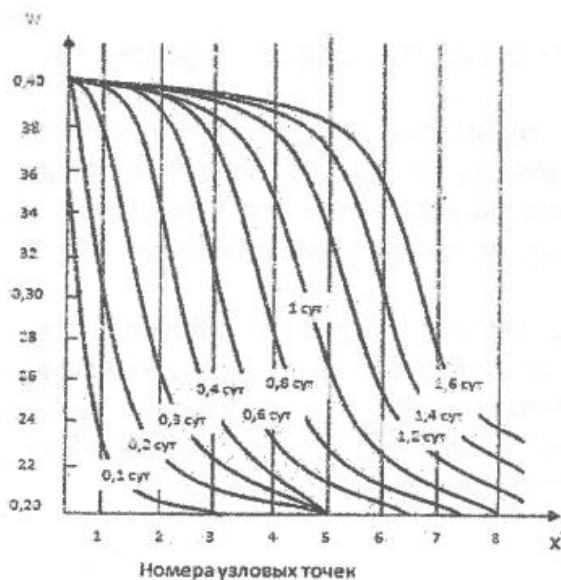


Рис.1. Изменение влажности вдоль колонки грунта во времени при $\Delta x = 0,1 \text{ м}$; $\Delta t = 1,0 \text{ сут}$.

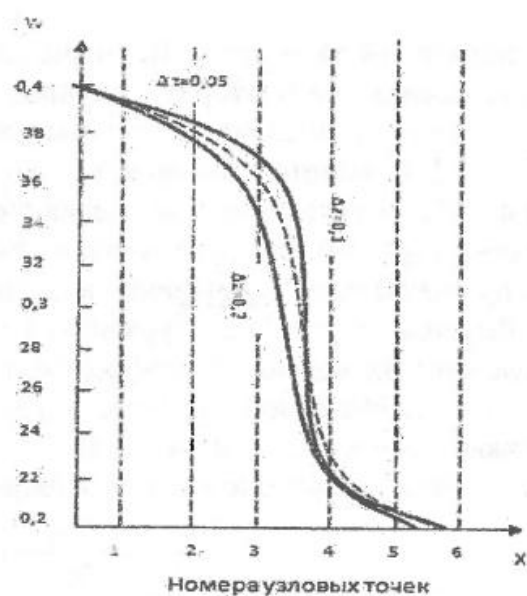


Рис.2. Распределение влажности вдоль колонки грунта на момент времени $t = 2,4 \text{ ч}$ при различных значениях Δx

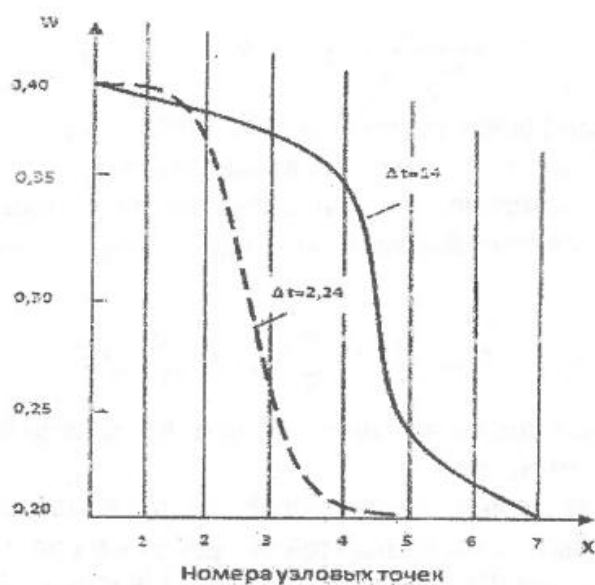


Рис.3. Распределение влажности вдоль колонки грунта при различных значениях Δt : 1 ч. и 2,4 ч.

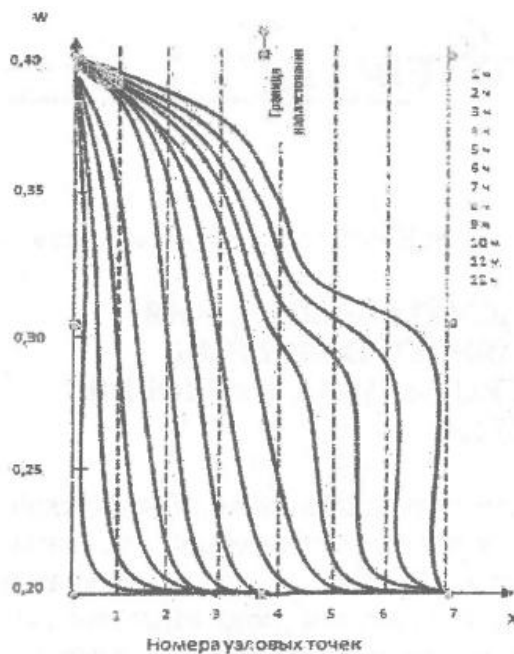


Рис.4. Распределение влажности вдоль колонки грунта при неоднородном его строении.

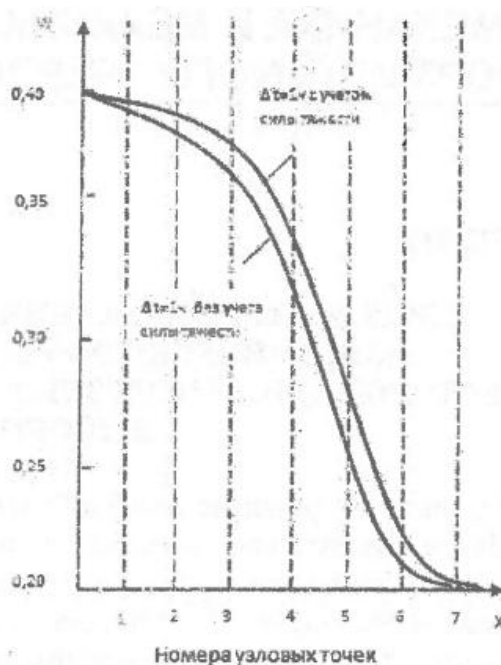


Рис.5. Распределение влажности вдоль колонки грунта с учетом и без учета гравитационного потенциала на момент времени $t = 14$ ч при $\Delta t = 1$ ч, $\Delta x = 0,1$ м.

Список литературы

1. Аверьянов С.Ф. Некоторые вопросы предупреждения засоления орошаемых земель и меры борьбы с ним в Европейской части СССР.// Сб.: Орошаемое земледелие в Европейской части СССР, 1965.
2. Аверьянов С.Ф. Зависимость водопроницаемости почв от содержания в них воздуха //Доклады АН СССР, т.69, № 2, 1949.
3. Бондаренко Н.Ф., Нерпин С.В., Пакшина С.М. О переносе влаги к фронту испарения при сильно нестационарном процессе.// Сб.: Физика почв и приемы их обработки, вып. 14. – Л.: Колос, 1967.
4. Веригин Н.Н., Шержуков Б.С., Шапинская Г.П. К расчету промывания засоленных почв //Труды координационных совещаний по гидротехнике, вып.35, 1967.
5. Полубаринова-Кочина П.Я., Эмих В.Н. Упрощенные схемы движения грунтовых вод при промывках// Динамика сплошной среды, вып. 2. – Новосибирск: Наука, 1969.