

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА ОТ УГЛА ЗАКРУЧИВАНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ ПРЯМОГО ВАЛА С УЧЕТОМ ЛИНЕЙНОГО УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Рассмотрим процесс кручения прямого вала круглого поперечного сечения радиуса R . Будем считать, что диаграмма сдвига материала вала известна и определена функцией $\tau=\tau(\gamma)$. Поставим задачу определения зависимости крутящего момента (M) от относительного угла закручивания (θ) вплоть до достижения нагрузки ее предельного значения. Данная задача, в общей постановке, была решена Л. Прандтлем и приведена в книге А. Наваи /1/. В этой работе получено, что при данном θ крутящий момент равен произведению момента инерции площади, ограниченной кривой $\tau=\tau(\gamma)$ относительно оси τ , на $2\pi/\theta^3$, при этом абсцисса площади кривой $\tau(\gamma)$ доходит до величины $\gamma_R=\theta \cdot R$.

Очевидно, что вид зависимости $M(\theta)$ зависит от характера диаграммы сдвига $\tau(\gamma)$. В данной работе аналитически исследуется вид функции $M(\theta)$ для случая, когда диаграмма сдвига аппроксимируется трехзвенной ломаной линией с линейным упрочнением (рис. 1). На этом рисунке τ_T - предел текучести; τ_K - конечная (максимальная) ордината диаграммы(γ); γ_T и γ_K - сдвиги соответствующие этим напряжениям; $\text{tg}\alpha=G$ - модуль сдвига;

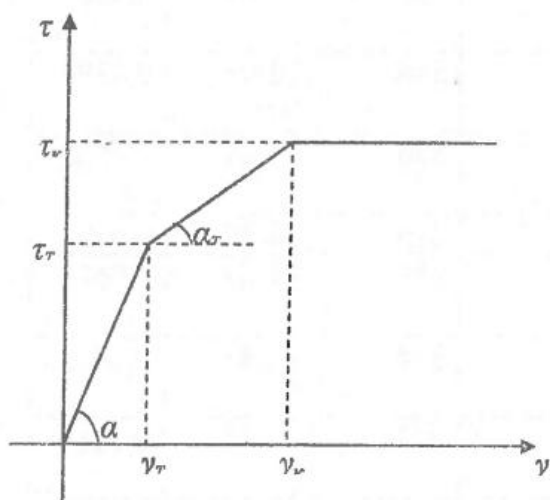


Рис.1

$\text{tg}\alpha_T=G_T$ - модуль упрочнения. В дальнейшем будем принимать: $G_T/G=n$, где $0 \leq n \leq 1$ - параметр упрочнения; $\tau_K/\tau_T=k>1$ - параметр прочности материала. При такой аппроксимации диаграммы сдвига вал в своей работе, до достижения значения предельного момента, работает последовательно в упругой области, в упруго-пластической области с упрочнением, затем в упруго-неупругой стадии, включающей зону текучести.

Для многих технических расчетов на прочность и жесткость, проводимых за пределом упругих деформаций, такая аппроксимация действительных диаграмм сдвига правомочна по двум причинам: первое, они имеют простые математические выражения, и второе, эти диаграммы хорошо совпадают с

экспериментально полученными диаграммами. В качестве примера приведем таблицу из работы /2/, где приведены параметры схематизированной диаграммы растяжения с линейным упрочнением для некоторых материалов.

Таблица 1

Материал	Термообработка	$\sigma_s, \text{МН/м}^2$	$\sigma_T, \text{МН/м}^2$	σ_s / σ_T	$\frac{E_T}{E}$
Сталь 40 X	Отжиг	700	428	1,63	0,069
	Закалка, отпуск 500 °С	1200	1144	1,05	0,022
	Закалка, отпуск 600 °С	1000	858	1,16	0,028
Сталь 40 ХНМ	Закалка отпуск 560 °С	1100	992	1,11	0,0285
Сталь 30 ХГС	Закалка, 330 °С	1600	965	1,66	0,224
	Закалка, отпуск 500 °С	1200	1113	1,07	0,035
	Закалка, отпуск 600 °С	1000	876	1,14	0,018
Сталь 18Х2Н4МА	Закалка, отпуск 525 °С	1150	985	1,16	0,0545
	Закалка 950 °С, закалка 850 °С, отпуск 150 °С	1320	685	1,92	0,311
Сталь Я1Т	Закалка 1050 °С	620	220	2,81	0,117
Сталь ЭИ 257	-	300	205	1,46	0,131
Сталь ЭИ 503	-	1050	798	1,31	0,104
Сталь 15Х18Н12С4ТЮ	Закалка 950 °С	800	304	2,63	0,327
Сталь ЭИ 659	Нормализация, отпуск 500 °С	1300	720	1,80	0,226
Сплав В95	Закалка+искусст. старение	640	588	1,08	0,0285
Сплав В95Т	Закалка+искусст. старение	600	556	1,08	0,0353
Сплав ВТ1	Отжиг 700 °С	600	429	1,39	0,079
Сплав Д16	Закалка+естест. старение	520	318	1,63	0,0625
Сплав Д16Т	Закалка+естест. старение	530	374	1,41	0,0445
Сплав АК4	Закалка+естест. старение	380	222	1,71	0,126

Принимая одинаковым коэффициент Пуассона в упругой и неупругой области деформирования, используя данную таблицу, можно получить некоторые параметры, характеризующие диаграмму сдвига рассматриваемых материалов. Тогда

$$\frac{E_T}{E} = \frac{G_T}{G} = n, \quad \frac{\sigma_s}{\sigma_T} = \frac{\tau_K}{\tau_T} = k.$$

В данном случае $0,018 \leq n \leq 0,327$, $1,05 \leq k \leq 2,81$.

А. Упругая работа вала.

В этом случае

$$\tau_{\max} \leq \tau_T. \quad (1)$$

Касательные напряжения и сдвиги определяются следующими формулами:

$$\tau = G\theta r, \quad \gamma = \theta r. \quad (2)$$

Здесь r - радиус вектор рассматриваемой точки поперечного сечения. Связь между крутящим моментом (M) и углом закручивания (θ) дается выражением

$$M = \theta \cdot G \cdot J_p. \quad (3)$$

Здесь J_p - полярный момент инерции сечения.

Значение угла закручивания, при котором максимальные касательные напряжения достигнут величины τ_T , обозначим через θ_T .

Очевидно, оно равно

$$\theta_T = \frac{\tau_T}{GR}. \quad (4)$$

Значение крутящего момента, соответствующее этому углу, обозначим через M_T .

Очевидно, оно будет равно

$$M = \tau_T W_p, \quad (5)$$

где W_p - момент сопротивления сечения.

Используя формулы (3)-(5), получаем зависимость момента от угла закручивания в упругой области деформирования в следующем виде:

$$\frac{M}{M_T} = \frac{\theta}{\theta_T}. \quad (\theta > 0). \quad (6)$$

Б. Неупругая работа вала (участок упрочнения).

В этом случае распределение касательного напряжения в поперечном сечении вала подчиняется следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} \tau_y &= G \cdot \theta \cdot r, & \text{при } r \leq r_T \\ \tau_n &= \tau_T + nG(\gamma - \gamma_T), & \text{при } r > r_T. \end{aligned} \quad (7)$$

В этих формулах угол закручивания, $\theta \geq \theta_T$.

Здесь r_T - радиус границы, разделяющий упругую и пластическую области.

Введем безразмерный радиус

$$\rho = \frac{r_T}{R}. \quad (8)$$

Учитывая, что $\gamma_T = \theta_T \cdot R$ и $\gamma_T = \theta \cdot r_T$, можно получить следующее соотношение:

$$\frac{\theta_T}{\theta} = \rho. \quad (9)$$

Теперь подсчитаем крутящий момент, действующий в сечении вала.

Очевидно, он будет равен

$$M = \int_{F_m} \tau_y \cdot r \cdot dF + \int_{F_n} \tau_n r dF.$$

Подставляя значения напряжений из формулы (7) и интегрируя, получаем

$$M = G\theta \cdot J_p \left[\frac{\rho}{3} (4 - \rho^3) + n \left(1 - \frac{4}{3} \rho + \frac{1}{3} \rho^4 \right) \right].$$

Введем обозначение

$$D(\rho) = \frac{\rho}{3} (4 - \rho^3) + n \left(1 - \frac{4}{3} \rho + \frac{1}{3} \rho^4 \right). \quad (10)$$

Последнюю формулу перепишем в виде

$$M = G\theta \cdot J_p D(\rho). \quad (11)$$

Приведем данную формулу к безразмерному виду, тогда

$$\frac{M}{M_T} = \frac{\theta}{\theta_T} \cdot D(\rho). \quad (\theta > \theta_T) \quad (12)$$

В. Неупругая работа (участок текучести).

Формула (12), очевидно, работает до достижения максимального касательного напряжения значения τ_k , т.е. $\tau_{\max} \leq \tau_k$. При этом угол закручивания θ не должен превышать значения угла θ_k , при котором максимальные напряжения будут равны τ_k . Используя диаграмму сдвига, найдем связь между θ_k и θ_T в виде

$$\frac{\theta_k}{\theta_T} = \frac{k-1}{n} + 1 = x. \quad (13)$$

Введем безразмерный параметр $\rho_k = \frac{r_k}{R}$. Здесь r_k - радиус границы, разделяющий область упрочнения от зоны текучести. Для него можно получить следующее соотношение

$$\frac{\rho_k}{\rho_T} = \frac{\theta_k}{\theta_T}. \quad (14)$$

Теперь подсчитаем крутящий момент для случая, когда $\theta > \theta_k$, в этом случае можем записать

$$M = \int_{F_y} \tau_y r \cdot dF + \int_{F_n} \tau_n r \cdot dF + \int_{F_T} \tau_k r \cdot dF. \quad (15)$$

Расписывая интегралы в формуле (15) и приведя их к безразмерному виду, получаем:

$$\frac{M}{M_T} = \frac{\theta}{\theta_T} \cdot D_1(\rho_T, \rho_k), \quad (\theta > \theta_k), \quad (16)$$

где

$$D_1(\rho_T, \rho_k) = \rho_T^4 \left[1 - \frac{4}{3} (1-n) (1-x^3) - n(1-x^4) \right] + \frac{4}{3} \rho_T (1-\rho_k^3) [1-n(1-x)]. \quad (17)$$

Таким образом, получены формулы, определяющие зависимость $M-\theta$ в безразмерном виде:

1. Для упругого участка работы вала

$$\frac{M}{M_T} = \frac{\theta}{\theta_T} \quad (\theta \leq \theta_T).$$

2. Для неупругого участка с упрочнением

$$\frac{M}{M_T} = \frac{\theta}{\theta_T} \cdot D(\rho) \quad (\theta_T \leq \theta \leq \theta_k) \\ (1 < \rho < \rho_T)$$

3. Для неупругого участка с учетом текучести

$$\frac{M}{M_T} = \frac{\theta}{\theta_T} \cdot D_1(\rho_T, \rho_k), \quad \theta_k \leq \theta \leq \infty \\ 1 < \rho_k < 0$$

На первом и втором этапе работы вала расчеты проводятся по формулам (6) и (12), и они очевидны. Приведем алгоритм построения зависимости $M/M_T \sim \theta/\theta_T$ для третьего этапа работы вала.

1. Задаемся характеристиками прочности и упрочнения вала, т.е. k и n .
2. По формуле (13) находим величину x , затем отношение $\theta_k/\theta_T = x$.
3. Задаемся величиной $\theta/\theta_T = m > x$.
4. Находим $\rho_k = x/m$ и $\rho_T = 1/m$.
5. Затем определяем $D_1(\rho_T, \rho_k)$ по формуле (17).
6. Вычисляем M/M_T по формуле (16).

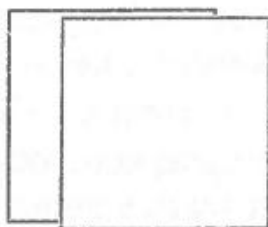
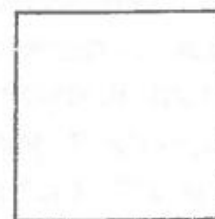


Рис.2



На рис. 2 приведены результаты расчетов в безразмерном виде для параметров материала $k=1,4$ и $n=0,1$.

В заключение данной работы найдем величину предельного момента для данного вала. При $\theta \rightarrow \infty$ правая часть формулы (16) стремится к величине $4k/3$. Следовательно,

$$M_{np} = \frac{4}{3} k \cdot M_T.$$

Для $k=1$ получаем классический «прандтлевский» результат:

$$M_{np} = 1,33M_T.$$

Список литературы

1. Надаи А. Пластичность /ОНТИ НКТП СССР. - М., 1936. - С. 280.
2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. - М.: Машиностроение, 1975. - С. 399.