

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ КОНКРЕТИЗАЦИИ КРИТЕРИЯ ПРОЧНОСТИ КУЛОНА-МОРА

Критерий Кулона-Мора используется, в основном, при составлении паспорта прочности горных пород. Последние, как известно, обладают рядом особенностей в их поведении под нагрузкой, что отличает также полухрупкие материалы от металлов и сплавов. В частности, при деформировании горных пород проявляется эффект дилатансии, вызывающий остаточное изменение объема. Этот эффект в явном виде возникает при нагрузках, превышающих пределы упругости. Это обстоятельство приводит к тому, что первые скольжения в материале испытываемых образцов происходят не в плоскости максимального касательного напряжения (как у пластичных материалов), а в соседних к ней плоскостях. Если интенсивность развивающихся затем (с ростом уровня напряжений) скольжений становится наибольшей в плоскости их возникновения, то именно по этой плоскости произойдет срез (разрушение) при достижении предельной нагрузки. Такая идеализированная схема определения плоскости среза подтверждается при анализе полученных в опытах значений угла среза α_0 для многих горных пород [1] при различных видах напряженного состояния. Этот угол при сжатии стандартных цилиндрических образцов отсчитывается от оси образца. Сжатие осуществляется по схеме Кармана, когда на осевое сжатие накладывается равномерное боковое поджатие, меньшее по величине, чем осевое напряжение (σ_1). При этом сжимающие напряжения считаются положительными.

Таким образом, главные напряжения соотносятся между собой так:

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \geq 0, \quad \sigma_2 / \sigma_1 = c, \quad (1)$$

где параметр c характеризует вид напряженного состояния.

В плоскости, повернутой относительно площадки действия максимального касательного напряжения (T) на угол β , нормальное и касательное напряжения определяются формулами:

$$\sigma_\beta = \sigma_0 + T \sin 2\beta, \quad \tau_\beta = T \cos 2\beta, \quad (2)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad T = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3)$$

Условие Кулона-Мора для пределов упругости (прочности) можно представить в виде:

$$\tau_\beta = S_0 - \mu \sigma_\beta. \quad (4)$$

Здесь μ, S_0 - параметры материала, определяемые из эксперимента.

Учитывая формулы (2), выразим условие (4) так:

$$T \cos 2\beta_0 = S_0 - \mu(\sigma_0 + T \sin 2\beta_0), \quad (5)$$

где β_0 - неизвестный угол, определяющий направление первого сдвига (или плоскость разрушения в случае ее совпадения с плоскостью первых скольжений).

Правая часть формулы (5) называется начальным сопротивлением скольжению (сдвигу), обозначается S_β . При первом скольжении касательные к кривым $S_\beta = S_\beta(\beta)$ и $\tau_\beta = \tau_\beta(\beta)$ совпадут, т.е.

$$\frac{dS_\beta}{d\beta} = \frac{d\tau_\beta}{d\beta} \text{ при } \beta = \beta_0, \quad (6)$$

что дает

$$\mu = \operatorname{tg} 2\beta_0. \quad (7)$$

Таким образом, величина угла β_0 определяется параметром μ , величина которого зависит от вида напряженного состояния (от c).

В плоскости среза соотношение между нормальным и касательным напряжениями удовлетворяет условию

$$\sigma_{\beta_0} = k\tau_{\beta_0}, \quad (k = k(c)). \quad (8)$$

По экспериментальным данным /2/ $k=2$ при напряженном состоянии $c=1/3$, когда максимальное касательное напряжение становится равным среднему главному напряжению; далее при $c>1/3$ реализуется критерий Треска, т.е.

$$T|_{c>1/3} = \text{const}, \quad k|_{c=1/3} = 2. \quad (9)$$

Условие (8) доставляет уравнение для определения угла β_0 . Из его решения, опуская промежуточные преобразования, получим

$$\sin 2\beta_0 = [-(1+c) + k\sqrt{(1+k^2)(1-c)^2 - (1+c)^2}] [(1+k^2)(1-c)]^{-1}. \quad (10)$$

Используя равенство (8), согласно (4) с учетом выражений (2) имеем

$$\sigma_1 = \frac{2S_0}{(1-c)(\cos 2\beta_0 + k \sin 2\beta_0)}. \quad (11)$$

Уравнение (11) дает связь между главными напряжениями, которую можно использовать для построения предельных кругов Мора, если задать параметр S_0 . Приемлемым является

$$S_0 = S_0^0 e^{c(\xi+c\eta)}, \quad (12)$$

где

$$S_0^0 = \frac{1}{2} \sigma_c (\cos 2\beta_0^0 + k_0 \sin 2\beta_0^0) \quad (\beta_0^0 = \beta_0|_{c=0}, \quad k_0 = k|_{c=0}). \quad (13)$$

Здесь σ_c - предел прочности при одноосном сжатии, а параметры ξ и η в общем случае определяются /3/ по экспериментальным данным для пределов прочности при каких-либо двух видах напряженного состояния, отличных от

одноосного сжатия. В первом приближении можно использовать только эксперимент на одноосное сжатие. Для этого вначале надо рассмотреть построение огибающей к кругам Мора.

Уравнение кругов Мора можно представить /3/ в виде

$$\varphi(\sigma, \tau, c) = \sigma^2 + \tau^2 - (1+c)\sigma_1\sigma + c\sigma_1^2 = 0, \quad (14)$$

где в качестве параметра данного семейства кругов фигурирует c .

Согласно известной теореме /4/ огибающая семейства вида (14) должна также удовлетворять уравнению:

$$\varphi_c(\sigma, \tau, c) = 0 \quad (\varphi_c = \partial\varphi/\partial c) \quad (15)$$

или

$$\varphi_c(\sigma, \tau, c) = -(\sigma_1)_c(1+c)\sigma - \sigma_1\sigma + \sigma_1^2 + 2\sigma_1c(\sigma_1)_c = 0. \quad (16)$$

Из системы уравнений (14) и (16) определяется совокупность точек (σ, τ) данной огибающей:

$$\sigma = \frac{\sigma_1[\sigma_1 + 2c(\sigma_1)_c]}{\sigma_1 + (1+c)(\sigma_1)_c}, \quad \tau = \frac{(1-c)\sigma_1}{\sigma_1 + (1+c)(\sigma_1)_c} \sqrt{[\sigma_1 + c(\sigma_1)_c](\sigma_1)_c}. \quad (17)$$

Принимая зависимость (11), найдем

$$(\sigma_1)_c = \sigma_1 R(c), \quad (18)$$

где

$$R(c) = \xi + 2c\eta + \frac{1}{1-c} - \frac{(k - \operatorname{tg} 2\beta_0)(\sin 2\beta_0)_c + k_c \sin 2\beta_0}{\cos 2\beta_0 + k \sin 2\beta_0}. \quad (19)$$

Согласно (17) - (19)

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{1 + 2cR}{(1-c)\sqrt{(1+cR)R}}. \quad (20)$$

Если известно полученное таким образом отношение σ/τ при двух видах напряженного состояния, то можно определить параметры ξ и η , через которые выражается функция $R(c)$, зная, кроме этого, функцию $k(c)$. Последняя обращается в константу, если соотношение (8) выполняется для всех видов напряженного состояния при условии, что $k(c)=k(1/3)$, т.е. k равно значению (9). При этом формула (10) должна давать значение угла среза α_0 ($\alpha_0=45^\circ-\beta_0$), наблюдаемое в опытах на трехосное сжатие для всех осуществленных видов напряженного состояния. Это требование выполняется почти точно для талькохлорита /2/. Для других горных пород (указанных в /2/) определяемое теоретическое значение угла α_0 подтверждается приближенно: отличие от наблюдаемого в опыте значения угла среза составляет при разных c от 3° до 7° . Наибольшее расхождение (из этого интервала) между расчетным и экспериментальным значением угла α_0 получается для большинства представленных в /2/ песчаников.

В случае одноосного сжатия ($c=0$) из (20) имеем

$$R_0 = R(0) = 1/(\sigma_0 / \tau_0)^2, \quad (21)$$

где

$$\sigma_0 / \tau_0 = (\sigma / \tau)|_{c=0}. \quad (22)$$

Из построения круга Мора $c=0$ отношение (22) легко выражается через угол α_0 . Это дает условие для определения параметра ξ . Второе условие - для определения параметра η - получим, учитывая, что максимальное касательное напряжение при переходе за некоторое предельное состояние c_n (т.е. при $c > c_n$, остается постоянным. Иначе говоря,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial c} \right|_{c > c_n} = 0. \quad (23)$$

Из этого равенства вытекает

$$(\sigma_1)_c = \sigma_1 \frac{1}{1-c} \quad (c \geq c_n). \quad (24)$$

Как указано выше, для большинства горных пород $c_n = 1/3$. При этом и угол β_0 с ростом c не изменяется, т.е.

$$(\sin 2\beta_0)_c|_{c=c_n+O(c)} = 0, \quad (25)$$

где $O(c)$ - бесконечно малая величина.

Сопоставляя (18) и (24), получим заявленное выше второе условие (для определения параметра η).

Согласно (8) и (2)

$$k = \frac{(1+c) + (1-c)\sin 2\beta_0}{(1-c)\cos 2\beta_0}. \quad (26)$$

Эту формулу используем при $c=0$ для определения коэффициента k_0 , задавая угол среза α_0 . Если при этом получается, что для рассматриваемого материала (с учетом экспериментальных данных) $k_0 \neq 2$, то функцию $k(c)$ представим, используя линейную интерполяцию:

$$k(c) = 3[ck_n + (1/3 - c)k_0], \quad (27)$$

где k_n равно значению (9), получающемуся для предельного напряженного состояния ($c=1/3$), при котором еще справедлив критерий Кулона-Мора.

В результате, используя только экспериментальные данные для одноосного сжатия и постулируемое поведение горных пород в момент смены критерия Кулона-Мора критерием Треска, можно по приведенным зависимостям построить предельные круги Мора и огибающую к ним для напряженных состояний $c \in [0, 1/3]$.

Для экстраполяции огибающей в область растягивающих напряжений (в частности, для определения предела прочности на растяжение) можно использовать метод, изложенный в [3].

Ниже на рис. 1 приведены расчетные круги Мора, построенные по зависимости (11) в сравнении с кругами Мора, построенными по экспериментальным данным А.Н.Ставрогина при разных видах напряженного состояния для талькохлорита, песчаника выбросоопасного и песчаника, не опасного по выбросам.

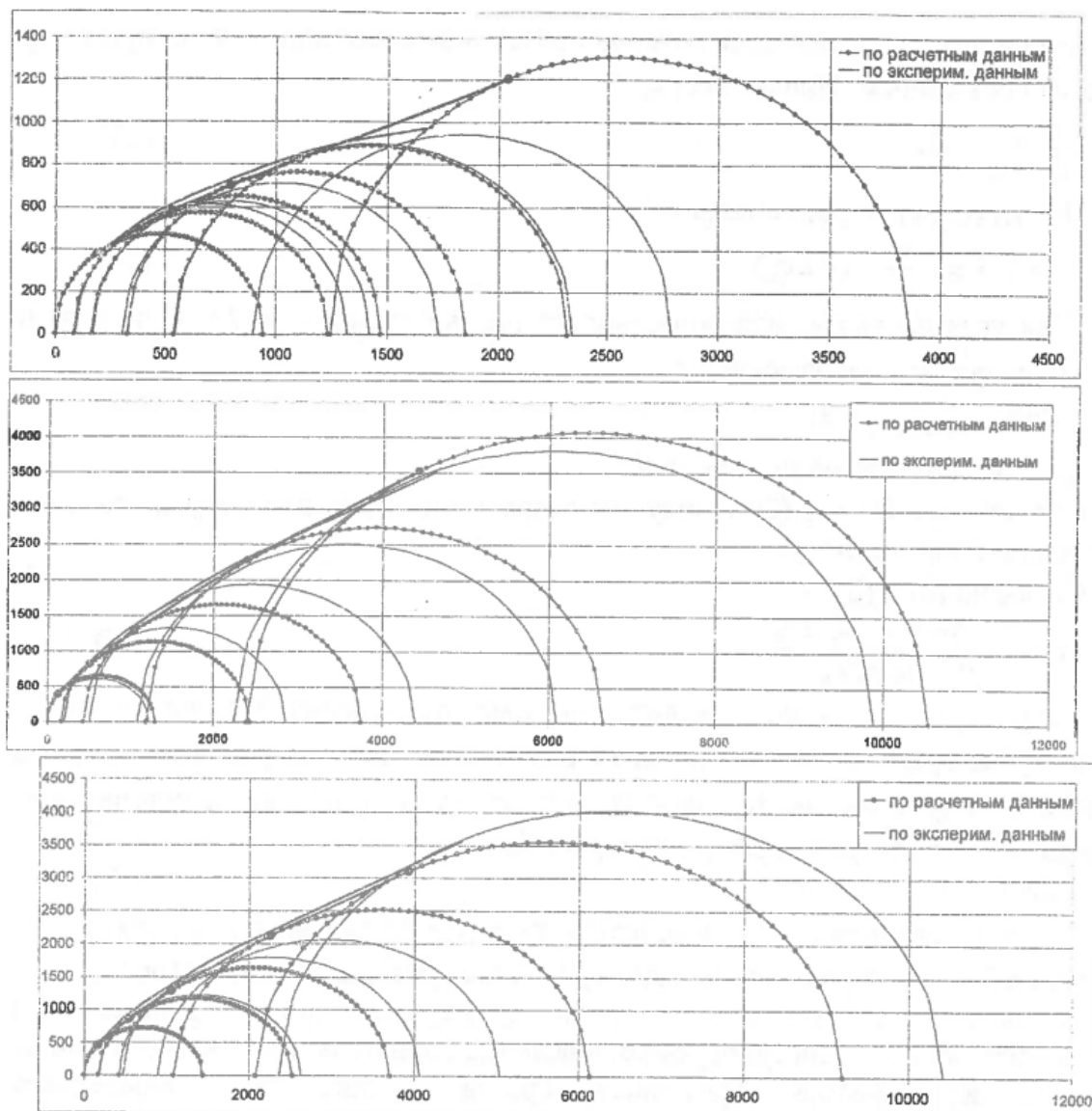


Рис. 1. Круги Мора для талькохлорита, песчаников выбросоопасного и неопасного по выбросам, построенные по расчетным данным и экспериментальным данным

Список литературы

1. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. — М.: Недра, 1979.
2. Тарасов Б.Г. Закономерности деформирования и разрушения горных пород при высоких давлениях. Автореферат. дис. на соиск. ... д-ра техн. наук. — СПб., 1991.
3. Рычков Б.А., Кондратьева Е.И., Маматов Ж.Б. Дилатансия геоматериалов с учетом разупрочнения // Вестник Самарского гос. ун-та. — 2004. — Спец. вып.
4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.