

МОДЕЛЬ ОСНАЩЕННОГО СТЕРЖНЯ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В работе рассматривается модель оснащенного стержня периодической структуры, состоящего из однородного упругого стержня, к которому с помощью каких-либо связей присоединены сосредоточенные массы, равномерно распределенные по длине стержня.

Впервые модель такого стержня была предложена в работе /1/ в связи с необходимостью исследования процесса виброударного отделения отливок от литейных блоков. В дальнейшем эта модель излагалась и в работе /2/.

При точном литье мелких деталей по выплавляемым моделям после заливки металла в форму и охлаждения получают литейный блок, который состоит из литникового стержня 1, к которому с помощью питателей 3 присоединены отливки 2 (рис. 1, а). В зависимости от массы и размеров отливок литейный блок может содержать от 2 до 200 отливок.

При составлении модели в работе /1/ центральный литниковый стержень представлялся в виде совокупности сосредоточенных масс m , связанных друг с другом упругими элементами с коэффициентом жесткости c_2 (рис. 1, б). Отливки моделировались сосредоточенными массами m_0 , связанными со стержнем упругими элементами с коэффициентом жесткости c_1 .

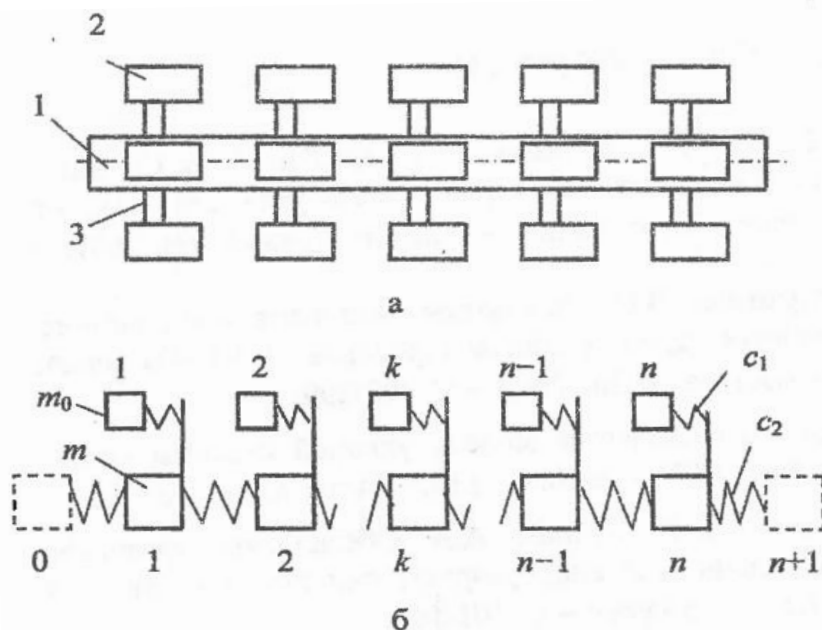


Рис. 1. Оснащенный стержень (а) и его дискретная модель (б)

Следует отметить, что в последующей работе /2/ допущена опечатка. На рис. 1, б перепутаны обозначения упругих элементов c_1 и c_2 .

В работе /1/ координаты масс m_0 обозначались через x_k , а масс m - через y_j , где k и j – номера масс m_0 и m . При этом всем массам m_0 присваивались нечетные номера (1,3,...), а массам m – четные номера ($j=2,4,\dots$).

Описание математической модели существенно упрощается, если в модели связанные массы m_0 и m обозначать одним номером, как показано на рис. 1, б. Дальнейшие процедуры не отличаются от изложенных в работе /1/.

Добавление ко всем массам модели фиктивных масс m с номерами 0 и $n+1$ позволяет описать движение всех масс m_0 и m , за исключением фиктивных, одинаковыми уравнениями вида:

$$m_0 \ddot{x}_k + c_1(x_k - y_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (1)$$

$$m \ddot{y}_k - c_1(x_k - y_k) - c_2(y_{k-1} - y_k) + c_2(y_k - y_{k+1}) = 0, \quad (2)$$

Граничные условия на концах стержня теперь записываются через координаты фиктивных масс следующим образом:

при свободных концах стержня

$$y_0 - y_1 = 0, \quad y_n - y_{n+1} = 0, \quad (3)$$

при одном свободном и другом закрепленном концах

$$y_0 - y_1 = 0, \quad y_{n+1} = 0, \quad \text{или} \quad y_0 = 0, \quad y_n - y_{n+1} = 0, \quad (4)$$

при обоих закрепленных концах

$$y_0 = 0, \quad y_{n+1} = 0. \quad (5)$$

Частные решения системы уравнений (1), (2) отыскивались в виде:

$$x_k = A_k \sin(pt + \varphi), \quad y_k = B_k \sin(pt + \varphi), \quad (6)$$

где p – собственная частота колебаний; φ – начальная фаза колебаний; t – время; A_k, B_k – постоянные коэффициенты, которые представлялись в виде:

$$A_k = a^* \sin k\beta + a \cos k\beta, \quad B_k = b^* \sin k\beta + b \cos k\beta, \quad (7)$$

где a^*, b^*, a, b – величины, зависящие от частоты колебаний и не зависящие от номера k .

Подстановка этих решений в уравнения (1), (2) дает систему алгебраических уравнений

$$(c_1 - m_0 p^2)(a^* \sin k\beta + a \cos k\beta) - c_1(b^* \sin k\beta + b \cos k\beta) = 0, \quad (8)$$

$$c_1(a^* \sin k\beta + a \cos k\beta) - (c_1 + 2c_2 - mp^2 - 2c_2 \cos \beta) \times \\ \times (b^* \sin k\beta + b \cos k\beta) = 0, \quad (9)$$

из которых находятся собственные частоты колебаний. При этом решение дает два спектра частот: низший p_{s1} и высший p_{s2} :

$$p_{s1} = \sqrt{h - \sqrt{h^2 - \lambda^2}}, \quad p_{s2} = \sqrt{h + \sqrt{h^2 - \lambda^2}},$$

где

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{m_0} + \frac{c_1}{m} + \frac{4c_2}{m} \sin^2 \frac{\beta_s}{2} \right), \quad \lambda^2 = \frac{4c_1 c_2}{m m_0} \sin^2 \frac{\beta_s}{2}.$$

Величина β_s определяется из граничных условий задачи: при свободных концах стержня (3)

$$\beta_0 = n, \quad \beta_s = \pi s / n, \quad s = 1, 2, \dots, n-1;$$

при одном свободном и другом закрепленном концах (4)

$$\beta_s = \frac{\pi(2s-1)}{(2n+1)}, \quad s = 1, 2, \dots, n;$$

при обоих закрепленных концах (5)

$$\beta_s = \frac{2\pi s}{2n+1}, \quad s = 1, 2, \dots, n;$$

Поскольку частоты p_s имеют два спектра при одном и том же значении s , то и постоянные a_s , b_s имеют по два значения, соответствующие каждому спектру. При этом $a^* = 0$, постоянные b^* и b связаны между собой соотношением

$$\frac{b_s^*}{b_s} = \operatorname{tg} \frac{\beta_s}{2},$$

а постоянные b_s , связаны с постоянными a_s соотношениями:

$$b_{s1} = a_{s1} \left(1 - \frac{m_0}{c_1} p_{s1}^2 \right) \cos \beta_s, \quad b_{s2} = a_{s2} \left(1 - \frac{m_0}{c_1} p_{s2}^2 \right) \cos \beta_s. \quad (10)$$

С учетом найденных соотношений частные решения уравнений движения (1), (2) можно представить в виде суммы решений, полученных для различных частот

$$x_{ks}(t) = a_{s1} \cos k \beta_s \sin(p_{s1} t + \varphi_{s1}) + a_{s2} \cos k \beta_s \sin(p_{s2} t + \varphi_{s2}),$$

$$y_{js}(t) = b_{s1} \cos[(j-1)\beta_s] \sin(p_{s1} t + \varphi_{s1}) + b_{s2} \cos[(j-1)\beta_s] \sin(p_{s2} t + \varphi_{s2}),$$

а общее решение системы дифференциальных уравнений (1), (2) запишется как сумма частных решений

$$x_k(t) = \sum_{s=1}^n \cos k\beta_s [a_{s1}\sin(p_{s1}t + \varphi_{s1}) + a_{s2}\sin(p_{s2}t + \varphi_{s2})], \quad (11)$$

$$y_k(t) = \sum_{s=1}^n \cos k\beta_s \left[a_{s1} \left(1 - \frac{m_0}{c_1} p_{s1}^2 \right) \sin(p_{s1}t + \varphi_{s1}) + a_{s2} \left(1 - \frac{m_0}{c_1} p_{s2}^2 \right) \sin(p_{s2}t + \varphi_{s2}) \right]. \quad (12)$$

Уравнения (11), (12) содержат четыре неизвестных параметра $a_{s1}, a_{s2}, \varphi_{s1}, \varphi_{s2}$, которые находятся из начальных условий:

$$x_k(0) = x_{k0}, \quad \dot{x}_k(0) = \dot{x}_{k0}, \quad (13)$$

$$y_k(0) = y_{k0}, \quad \dot{y}_k(0) = \dot{y}_{k0}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (14)$$

Методика их определения в работах /1, 2/ не приводится.

Эти параметры могут быть найдены методом главных координат.

Заметим, что в уравнениях (11) и (12) первый сомножитель, стоящий под знаком суммы, представляет собой форму колебаний. Обозначим его X_{ks} .

$$X_{ks} = \cos k\beta_s.$$

Заметим также, что главными координатами являются функции:

$$q_{s1} = a_{s1}\sin(p_{s1}t + \varphi_{s1}), \quad q_{s2} = a_{s2}\sin(p_{s2}t + \varphi_{s2}), \quad (15)$$

Распишем сумму в уравнении (11) с учетом этих обозначений

$$x_1(t) = X_{11}(q_{11} + q_{12}) + X_{12}(q_{21} + q_{22}) + \dots + X_{1s}(q_{s1} + q_{s2}) + \dots + X_{1n}(q_{n1} + q_{n2}),$$

$$x_2(t) = X_{21}(q_{11} + q_{12}) + X_{22}(q_{21} + q_{22}) + \dots + X_{2s}(q_{s1} + q_{s2}) + \dots + X_{2n}(q_{n1} + q_{n2}),$$

.....

$$x_k(t) = X_{k1}(q_{11} + q_{12}) + X_{k2}(q_{21} + q_{22}) + \dots + X_{ks}(q_{s1} + q_{s2}) + \dots + X_{kn}(q_{n1} + q_{n2}),$$

.....

$$x_n(t) = X_{n1}(q_{11} + q_{12}) + X_{n2}(q_{21} + q_{22}) + \dots + X_{ns}(q_{s1} + q_{s2}) + \dots + X_{nn}(q_{n1} + q_{n2}).$$

Умножим первое уравнение этой системы на $m_0 X_{1s}$, второе – на $m_0 X_{2s}$, третье – на $m_0 X_{ks}$ последнее – на $m_0 X_{ns}$ и сложим уравнения почленно. Получим:

$$\sum_{k=1}^n m_0 X_{ks} X_k = (q_{11} + q_{12}) \sum_{k=1}^n m_0 X_{ks} X_{k1} + (q_{21} + q_{22}) \sum_{k=1}^n m_0 X_{ks} X_{k2} + \dots + (q_{s1} + q_{s2}) \sum_{k=1}^n m_0 X_{ks}^2 + \dots + (q_{n1} + q_{n2}) \sum_{k=1}^n m_0 X_{ks} X_{kn}.$$

В соответствии со свойством ортогональности собственных форм колебаний все суммы в правой части равенства, кроме суммы, содержащей квадрат формы X_{ks} равны нулю. Отсюда следует:

$$(q_{s1} + q_{s2}) = \frac{\sum_{k=1}^n X_{ks} X_k}{\sum_{k=1}^n X_{ks}^2}. \quad (16)$$

Дифференцируя левую и правую части этого уравнения по времени, получим:

$$(\dot{q}_{s1} + \dot{q}_{s2}) = \frac{\sum_{k=1}^n X_{ks} \dot{X}_k}{\sum_{k=1}^n X_{ks}^2}. \quad (17)$$

Аналогично для масс m форм колебаний описывается функцией:

$$Y_{ks} = \cos k\beta \cdot \cos \beta_s = X_{ks} \cos \beta_s.$$

Проводя процедуры, аналогичные приведенным выше, получим:

$$(\lambda_{s1} q_{s1} + \lambda_{s2} q_{s2}) = \frac{\sum_{k=1}^n Y_{ks} y_k}{\sum_{k=1}^n Y_{ks}^2} = \frac{\sum_{k=1}^n X_{ks} y_k}{\cos \beta_s \sum_{k=1}^n X_{ks}^2}. \quad (18)$$

$$(\lambda_{s1} \dot{q}_{s1} + \lambda_{s2} \dot{q}_{s2}) = \frac{\sum_{k=1}^n Y_{ks} \dot{y}_k}{\sum_{k=1}^n Y_{ks}^2} = \frac{\sum_{k=1}^n X_{ks} \dot{y}_k}{\cos \beta_s \sum_{k=1}^n X_{ks}^2}. \quad (19)$$

где

$$\lambda_{s1} = 1 - \frac{m_0}{c_1} p_{s1}^2, \quad \lambda_{s2} = 1 - \frac{m_0}{c_1} p_{s2}^2.$$

Дальнейший путь определения постоянных коэффициентов покажем на примере, когда оснащенный стержень, двигаясь вправо со скоростью V_0 , наносит удар по жесткой преграде. В этом случае граничные условия описываются первой парой соотношений (4).

При этих условиях выражения (16)–(19) с учетом функций главных координат (15) принимают вид

$$a_{s1} \sin \varphi_{s1} + a_{s2} \sin \varphi_{s2} = 0. \quad (20)$$

$$a_{s1} p_{s1} \cos \varphi_{s1} + a_{s2} p_{s2} \cos \varphi_{s2} = V_0 Q_{ks}. \quad (21)$$

$$\lambda_{s1} a_{s1} \sin \varphi_{s1} + \lambda_{s2} a_{s2} \sin \varphi_{s2} = 0, \quad (22)$$

$$\lambda_{s1} a_{s1} p_{s1} \cos \varphi_{s1} + \lambda_{s2} a_{s2} p_{s2} \cos \varphi_{s2} = \frac{V_0}{\cos \beta_s} Q_{ks}, \quad (23)$$

где

$$Q_{ks} = \frac{\sum_{k=1}^n X_{ks}}{\sum_{k=1}^n X_{ks}^2}.$$

Решая совместно эту систему уравнений, найдем:

$$\varphi_{s1} = \varphi_{s2} = 0, \\ a_{s1} = \frac{(1 - \lambda_{s2} \cos \beta_s)}{p_{s1} (\lambda_{s1} - \lambda_{s2}) \cos \beta_s} V_0 Q_{ks}, \quad a_{s2} = -\frac{(1 - \lambda_{s1} \cos \beta_s)}{p_{s2} (\lambda_{s1} - \lambda_{s2})} V_0 Q_{ks}.$$

С учетом найденных постоянных решения (11), (12) принимают вид:

$$x_k(t) = \\ = V_0 \sum_{s=1}^n \frac{Q_{ks} (1 - \lambda_{s2} \cos \beta_s) \cos k \beta_s}{p_{s1} (\lambda_{s1} - \lambda_{s2}) \cos \beta_s} \left[\sin p_{s1} t - \frac{p_{s1} (1 - \lambda_{s1} \cos \beta_s)}{p_{s2} (1 - \lambda_{s2} \cos \beta_s)} \sin p_{s2} t \right], \\ y_k(t) = \\ = V_0 \sum_{s=1}^n \frac{Q_{ks} \lambda_{s1} (1 - \lambda_{s2} \cos \beta_s) \cos k \beta_s}{p_{s1} (\lambda_{s1} - \lambda_{s2})} \left[\sin p_{s1} t - \frac{\lambda_{s2} p_{s1} (1 - \lambda_{s1} \cos \beta_s)}{\lambda_{s1} p_{s2} (1 - \lambda_{s2} \cos \beta_s)} \sin p_{s2} t \right].$$

Усилия в упругих связях масс m_0 и m определяются как:

$$F_k = c_1(x_k - y_k),$$

а в упругих связях масс m :

$$P_k = c_2(y_k - y_{k+1}).$$

Полученные зависимости позволяют проводить анализ влияния различных факторов на свободные колебания оснащенных стержней.

Список литературы

1. Еремьянц В.Э. Свободные колебания оснащенных стержней. //Изв. АН Кирг.ССР. – 1990. – № 4. – С.40-47.
2. Еремьянц В.Э. Динамика ударных систем: Учебное пособие в 2-х частях. Часть 1. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2011. – 323 с.