

МОДЕЛЬ ОСНАЩЕННОГО СТЕРЖНЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В статье «Модель оснащенного стержня с конечным числом степеней свободы» [1], помещенной в данном сборнике, оснащенный стержень представлялся в виде ряда сосредоточенных масс m (рис. 1), связанных друг с другом упругими связями с коэффициентом жесткости c_2 . К каждой из этих масс с помощью упругих связей с коэффициентом жесткости c_1 присоединена сосредоточенная масса m_0 .

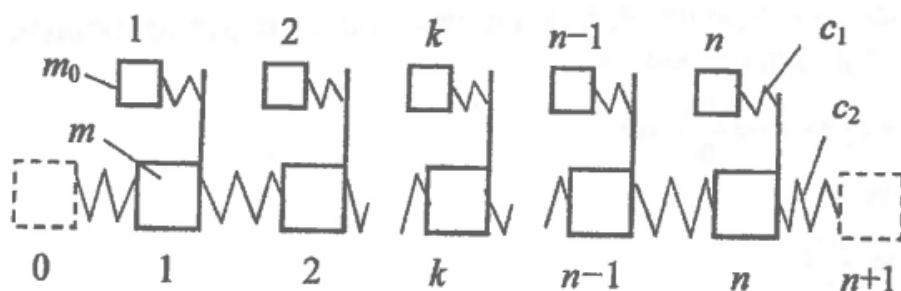


Рис. 1

При большом числе масс m_0 анализ этой модели связан с необходимостью громоздких вычислений. В связи с этим в настоящей работе сделана попытка упростить математическое описание динамических процессов в оснащем стержне, представив его моделью с распределенными параметрами.

Представим стержень как упругое тело, к которому по всей длине с помощью упругих связей присоединены элементарные жесткие массы, не связанные друг с другом. Обозначим перемещения сечений стержня через u_1 , а перемещения сосредоточенных масс – через u_2 . Поскольку стержень упругий с распределенными параметрами, то эти перемещения зависят от времени и от координаты сечения: $u_1 = u_1(x, t)$, $u_2 = u_2(x, t)$.

Выделим в стержне элементарный участок длиной dx (рис. 2). Масса этого участка $m dx$, где m – погонная масса самого стержня. Этот участок связан с сосредоточенной массой величиной $m_0 dx$, упругим элементом с жесткостью $c dx$, где m_0 – величина сосредоточенных масс, приходящихся на единицу длины стержня; c – жесткость всех упругих связей, расположенных на единичной длине стержня.

Если масса самого стержня m_1 , величина одной сосредоточенной массы m_2 , а жесткость одной упругой связи сосредоточенной массы со стержнем c_0 , то параметры модели связаны с параметрами оснащенного стержня соотношениями:

$$m = m_1 / l = \rho S, m_0 = n m_2 / l, c = n c_0 / l, \quad (1)$$

где ρ – плотность материала стержня; S – площадь поперечного сечения стержня, l – длина стержня; n – количество сосредоточенных масс.

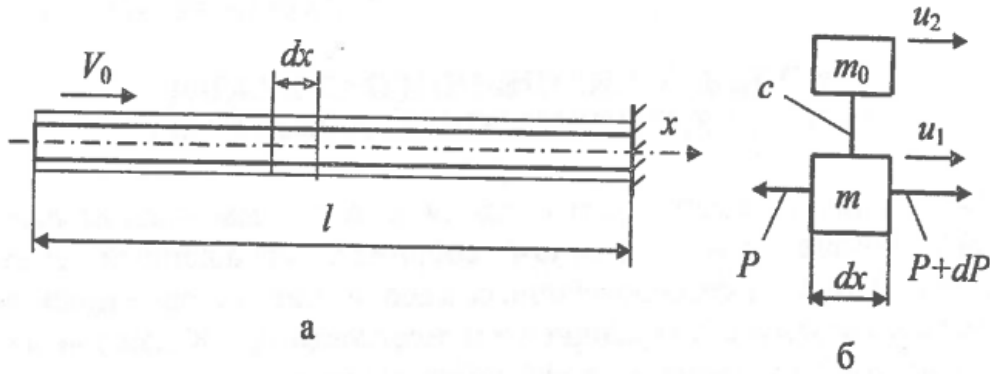


Рис. 2.

Запишем уравнение проекций сил, действующих на элементарный участок массой $m dx$, включая силы инерции

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx - c dx (u_1 - u_2) - m dx \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0.$$

Учитывая, что

$$P = ES \frac{\partial u_1}{\partial x} = m a^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad (2)$$

и, сокращая все члены на dx , приведем это уравнение к виду:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + k^2 (u_1 - u_2) - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

где E – модуль упругости материала стержня; a – скорость распространения волны деформации в гладком упругом стержне, $a = \sqrt{E/\rho}$, $k^2 = c/m$.

Записывая сумму проекций сил, действующих на массу $m_0 dx$, добавляя к ним силы инерции и сокращая все члены уравнения на dx , получим:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - k_0^2 (u_1 - u_2) = 0, \quad (4)$$

где $k_0^2 = c/m_0$.

Выражая из уравнения (3)

$$u_2 = u_1 - \frac{a^2}{k^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (5)$$

и подставляя это выражение в уравнение (4), получим:

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial t^4} - a^2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial t^2} + k_0^2 (1 + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - k_0^2 a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \quad (6)$$

где $\mu = m_0/m$.

Примем, что решение этого уравнения при свободных колебаниях имеет вид:

$$u_1(x, t) = X_1(x) \cos(pt + \varphi), \quad (7)$$

где $X_1(x)$ – амплитудная функция, зависящая от координаты x и не зависящая от времени; $\cos(pt+\varphi)$ – главная координата, зависящая только от времени.

Подставляя решение (7) в уравнение (6) и сокращая все члены на $\cos(pt+\varphi)$, приведем его к виду:

$$X_1'' + \beta^2 X_1 = 0, \quad (8)$$

где

$$X_1'' = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad \beta^2 = \frac{p^2}{a_2} \left(1 - \frac{k_0^2 \mu}{p^2 - k_0^2} \right). \quad (9)$$

Решение уравнения (8) имеет вид:

$$X_1(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x.$$

где A и B – постоянные, определяемые из граничных условий задачи.

Примем, что оснащенный стержень длиной l , двигаясь со скоростью V_0 , наносит удар по жесткой преграде. Начало координат оси x расположено на торце стержня, противоположном ударному торцу. Тогда граничные условия будут иметь вид:

$$X_1'(0) = 0, \quad X_1(l) = 0. \quad (10)$$

Из них следует: $A = 0$, $B \cos \beta l = 0$. Так как $B \neq 0$, то граничные условия выполняются при следующих значениях β :

$$\beta_s = (2s-1)\pi/2l, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

При известном значении β_s собственные частоты колебаний стержня находятся из выражения (9) как:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [a^2 \beta_s^2 + k_0^2 (1 + \mu)]} \pm \sqrt{\frac{1}{4} [a^2 \beta_s^2 + k_0^2 (1 + \mu)]^2 - a^2 \beta_s^2 k_0^2}. \quad (12)$$

Из полученной формулы видно, что в данном случае, как и в модели с конечным числом степеней свободы, существуют два спектра собственных частот. Низший спектр p_{s1} , соответствующий знаку минус в выражении (12), и высший спектр p_{s2} , соответствующий знаку плюс.

Если в частном случае принять, что сосредоточенные массы на стержне отсутствуют, то $k_0 = 0$ и

$$p_{s1} = 0, \quad p_{s2} = \frac{a\pi(2s-1)}{2l},$$

т.е. получим один спектр частот – высший, соответствующий частотам гладкого неоснащенного стержня. Это свидетельствует о достоверности полученного решения.

Формы колебаний определяются как:

$$X_{1s1}(x) = B_{s1} \cos \beta_s x, \quad X_{1s2}(x) = B_{s2} \cos \beta_s x.$$

Частное решение уравнения движения (6) запишется в виде:

$$u_{1s}(x, t) = \cos \beta_s x [B_{s1} \cos(p_{s1} t + \varphi_{s1}) + B_{s2} \cos(p_{s2} t + \varphi_{s2})]. \quad (13)$$

Подставляя его в соотношение (5) получим частное решение для функции $u_2(x, t)$:

$$u_{2s}(x, t) = \cos \beta_s x [B_{s1} \lambda_{s1} \cos(p_{s1} t + \varphi_{s1}) + B_{s2} \lambda_{s2} \cos(p_{s2} t + \varphi_{s2})], \quad (14)$$

Общее решение для функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ определится как сумма частных решений:

$$u_1(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \cos \beta_s x [B_{s1} \cos(p_{s1} t + \varphi_{s1}) + B_{s2} \cos(p_{s2} t + \varphi_{s2})], \quad (15)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \cos \beta_s x [B_{s1} \lambda_{s1} \cos(p_{s1} t + \varphi_{s1}) + B_{s2} \lambda_{s2} \cos(p_{s2} t + \varphi_{s2})], \quad (16)$$

где

$$\lambda_{s1} = 1 + \frac{a^2 \beta_s^2 - p_{s1}^2}{k^2}, \quad \lambda_{s2} = 1 + \frac{a^2 \beta_s^2 - p_{s2}^2}{k^2}. \quad (17)$$

Постоянные интегрирования B_{s1} , B_{s2} , φ_{s1} , φ_{s2} находятся из начальных условий задачи, которые в рассматриваемом случае имеют вид:

$$u_1(x, 0) = 0, \quad u_2(x, 0) = 0, \quad \dot{u}_1(x, 0) = V_0, \quad \dot{u}_2(x, 0) = V_0. \quad (18)$$

Принимая в качестве безразмерной амплитудной функции $X(x) = \cos \beta_s x$,

а в качестве главных координат:

$$q_{s1} = B_{s1} \cos(p_{s1} t + \varphi_{s1}), \quad q_{s2} = B_{s2} \cos(p_{s2} t + \varphi_{s2}), \quad (19)$$

можно записать систему уравнений, отражающую связь главных координат с физическими координатами системы при начальных условиях /2/:

$$q_{s1}(0) + q_{s2}(0) = u_1(x, 0) Q_s, \quad \lambda_{s1} q_{s1}(0) + \lambda_{s2} q_{s2}(0) = u_2(x, 0) Q_s,$$

$$\dot{q}_{s1}(0) + \dot{q}_{s2}(0) = \dot{u}_1(x, 0) Q_s, \quad \lambda_{s1} \dot{q}_{s1}(0) + \lambda_{s2} \dot{q}_{s2}(0) = \dot{u}_2(x, 0) Q_s,$$

где

$$Q_s = \frac{\int_0^l X(x) dx}{\int_0^l X^2(x) dx}. \quad (20)$$

Подставляя в эти уравнения граничные условия (18), соотношения (19) и вычисляя интегралы (20) запишем:

$$\begin{aligned}
B_{s1} \cos \varphi_{s1} + B_{s2} \cos \varphi_{s2} &= 0, \quad \lambda_{s1} B_{s1} \cos \varphi_{s1} + \lambda_{s2} B_{s2} \cos \varphi_{s2} = 0, \\
B_{s1} p_{s1} \sin \varphi_{s1} + B_{s2} p_{s2} \sin \varphi_{s2} &= (-1)^{s-1} \frac{2V_0}{\beta_s l}, \\
\lambda_{s1} B_{s1} p_{s1} \sin \varphi_{s1} + \lambda_{s2} B_{s2} p_{s2} \sin \varphi_{s2} &= (-1)^{s-1} \frac{2V_0}{\beta_s l}.
\end{aligned}$$

Из первой пары этих уравнений следует: $\varphi_{s1} = \varphi_{s2} = \pi/2$, а из третьего и четвертого уравнений –

$$B_{s1} = \frac{2V_0 (-1)^{s-1} (\lambda_{s2} - 1)}{\beta_s l p_{s1} (\lambda_{s1} - \lambda_{s2})}, \quad B_{s2} = -\frac{2V_0 (-1)^{s-1} (\lambda_{s1} - 1)}{\beta_s l p_{s2} (\lambda_{s1} - \lambda_{s2})}.$$

С учетом этого и соотношений (17) решения (15), (16) принимают вид:

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \frac{2V_0}{l} \sum_{s=1}^{\infty} \cos \beta_s x \frac{(-1)^{s-1} (a^2 \beta_s^2 - p_{s2}^2)}{\beta_s p_{s1} (p_{s2}^2 - p_{s1}^2)} \\
&\quad \times \left[\sin p_{s1} t - \frac{p_{s1} (a^2 \beta_s^2 - p_{s1}^2)}{p_{s2} (a^2 \beta_s^2 - p_{s2}^2)} \sin p_{s2} t \right], \\
u_2(x, t) &= \frac{2V_0}{l} \sum_{s=1}^{\infty} \cos \beta_s x \frac{(-1)^{s-1} (a^2 \beta_s^2 - p_{s2}^2) \lambda_{s1}}{\beta_s p_{s1} (p_{s2}^2 - p_{s1}^2)} \\
&\quad \times \left[\sin p_{s1} t - \frac{p_{s1} \lambda_{s2} (a^2 \beta_s^2 - p_{s1}^2)}{p_{s2} \lambda_{s1} (a^2 \beta_s^2 - p_{s2}^2)} \sin p_{s2} t \right].
\end{aligned}$$

Усилия в упругих связях масс m и m_0 определяются как

$$F_y(x, t) = c[u_1(x, t) - u_2(x, t)],$$

а усилия в сечениях центрального стержня:

$$\begin{aligned}
P(x, t) &= ma^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \\
&= -\frac{2ma^2 V_0}{l} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \beta_s x \frac{(-1)^{s-1} (a^2 \beta_s^2 - p_{s2}^2)}{p_{s1} (p_{s2}^2 - p_{s1}^2)} \\
&\quad \times \left[\sin p_{s1} t - \frac{p_{s1} (a^2 \beta_s^2 - p_{s1}^2)}{p_{s2} (a^2 \beta_s^2 - p_{s2}^2)} \sin p_{s2} t \right].
\end{aligned}$$

Знак минус перед правой частью этого равенства показывает, что в сечениях стержня действуют усилия сжатия.

Амплитуды перемещений и сил, действующих в сечениях стержня, с увеличением параметра s интенсивно уменьшаются и в большинстве случаев с погрешностью, не превышающей 3%, достаточно удержать первые три члена в разложении функций описывающих эти параметры.

Сравнивая данный метод с методом, изложенным в статье /1/, можно отметить, что он позволяет получить более простые выражения при большом числе сосредоточенных масс. При малом числе масс предпочтительным является первый метод.

Список литературы

1. Еремянц В.Э., Муктарбекова Г.М. Модель оснащенного стержня с конечным числом степеней свободы. Статья в настоящем сборнике.
2. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высш. школа, 1972. – 412 с.