

О ПРОДОЛЬНОЙ ПРОКАТКЕ ПОЛОСЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ

1. Продольная прокатка. Прокаткой называется /1, 2/ процесс пластического деформирования тел между вращающимися приводными валками.

Способ продольной прокатки является наиболее распространенным. В этом случае полоса подводится к валкам, вращающимся в разные стороны, и втягивается в зазор между ними. За счет сил трения на контактной поверхности полоса обжимается по высоте и принимает форму зазора (калибра) между валками. При этом способе прокатки полоса совершает только поступательное движение.

Кинематика процесса продольной прокатки полосы

Рассмотрим случай прокатки в валках одинакового радиуса, вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями (рис.1)/

В результате операции полоса толщиной h_1 на входе в валки становится h_2 на выходе из валков.

Отношение:

$$\Lambda = \frac{h_1 - h_2}{h_1} \quad (1.1)$$

называется обжатием полосы.

Часть полосы между входом и выходом из валков рассматривается как очаг деформации.

Предполагается, что вся деформация полосы происходит в очаге деформации.

Основные параметры деформирования полосы следующие:

– закон изменения толщины полосы в очаге деформации

$$h = h_2 + 2R(1 - \cos \alpha); \quad (1.2)$$

– абсцисса текущей точки на дуге контакта

$$x = R \sin \alpha; \quad (1.3)$$

– длина очага деформации

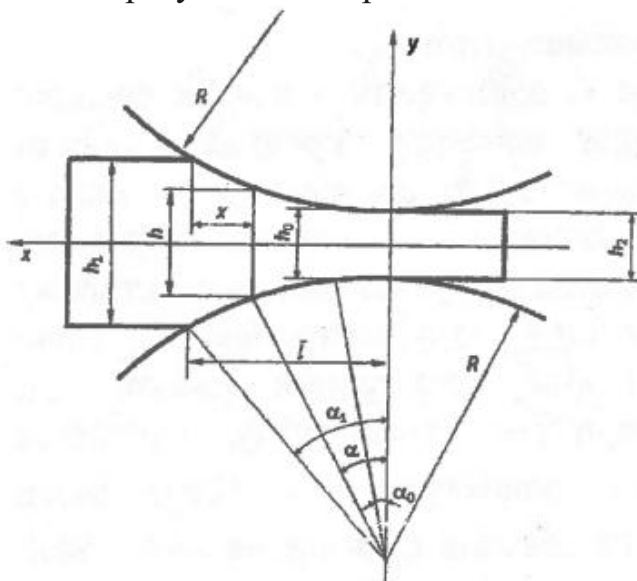


Рис.1. Кинематическая схема

$$\bar{l} = R \sin \alpha_1; \quad (1.4)$$

– радиус деформированной поверхности вала

$$R = R_0 \left[1 + \frac{P_y}{C \Delta h} \right], \quad (1.5)$$

причем

$$C = \frac{\pi E}{16(1 - \mu^2)}. \quad (1.6)$$

Здесь R – радиус деформированной поверхности вала; α_1 – угол захвата полосы между валами ($\alpha_1 = \max \alpha$); E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона материала вала; P_y – вертикальная проекция действующих на валок сил, приходящихся на единицу ширины полосы; $\Delta h = h_1 - h_2$ – изменения толщины листа при прокатке.

Полагается, что если ширина полосы b более чем в 5 раз превышает диаметр валков, то деформацию вдоль ширины полосы можно принять равной нулю. При этом, воспользовавшись условием несжимаемости материала, получим закономерность изменения средних скоростей перемещений v в направлении прокатки в виде:

$$v = \frac{v_1 h_1}{h} = \frac{v_2 h_2}{h}, \quad (1.7)$$

где v_1, v_2 – соответственно средние скорости перемещений на входе и выходе из валков, h – текущая толщина полосы, определяемая углом α .

Из выражения (1.7) видно, что по мере продвижения в валках средняя скорость v возрастает. Очевидно, что если на входе средняя скорость перемещения меньше окружной скорости валков, то на выходе из валков указанная скорость больше окружной. Это означает, что на начальном участке контакта полосы и валков силы, действующие на полосу, направлены в сторону движения металла, а на участке, примыкающем к выходу, в сторону, обратную движению. Угловую координату точки, в которой силы трения меняют знак, обозначим через x_0 . Сечение, соответствующее этому углу, считается нейтральным, а толщина полосы при этом равняется h_0 . Часть очага деформации от входа в валки до нейтрального сечения называется /1-3/ зоной отставания, а другая часть от нейтрального сечения – зоной опережения.

В соответствие принятому допущению (1.7) рассмотрим двухмерную задачу прессования полосы.

2. Постановка задачи. Предполагается, что в процессе прокатки полосы угол захвата валков малый. Это означает, что определения энергосиловых и кинематических параметров технологической операции может быть привлечено

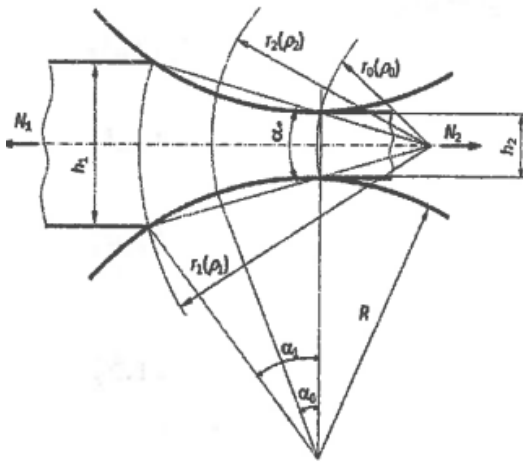


Рис. 2. К постановке задачи

проведенное /1, 4, 5/ исследование течения материалов в клиновидном сходящемся канале с углом при вершине α^* (рис. 2). Иными словами, дуга контакта заменяется прямой линией.

Считается, что процесс прокатки реализуется в изотермических условиях в диапазоне температур, не выходящих за термический интервал сверхпластичности промышленных алюминиевых сплавов /6/.

Введем цилиндрическую систему координат gxz , причем начало координат разместим в вершине клина.

Математическая формулировка задачи включает:

– дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\alpha}{\rho} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{\rho\alpha}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{2\tau_{\rho\alpha}}{\rho} = 0; \quad (2.1)$$

– кинематические соотношения

$$\dot{\epsilon}_\rho = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho}; \quad \dot{\epsilon}_\alpha = \frac{v_\rho}{\rho}; \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \alpha}; \quad (2.2)$$

– условие несжимаемости в скоростях

$$\dot{\epsilon}_\rho + \dot{\epsilon}_\alpha = 0; \quad (2.3)$$

– определяющие соотношения в уравнении теории упругопластических процессов малой кривизны /7/

$$\sigma_\rho - \sigma_0 = \frac{2\sigma_u}{3\dot{\epsilon}_u} \dot{\epsilon}_\rho; \quad \sigma_\alpha - \sigma_0 = \frac{2\sigma_u}{3\dot{\epsilon}_u} \dot{\epsilon}_\alpha; \quad \tau_{\rho\alpha} = \frac{\sigma_u}{3\dot{\epsilon}_u} \dot{\gamma}_{\rho\alpha}; \quad 3\sigma_0 = \sigma_\rho + \sigma_\alpha; \quad (2.4)$$

– уравнение состояния /6/ в форме зависимости интенсивности напряжений от интенсивности скоростей деформаций

$$\sigma_u = 1 - m_0 - \beta + (3m_0 + \beta)\dot{\epsilon}_u - 3m_0\dot{\epsilon}_u^2 + m_0\dot{\epsilon}_u^3, \quad (2.5)$$

здесь $\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}$ – составляющие тензоров напряжений и скоростей деформаций, отнесенные соответственно к альтернативным внутренним параметрам состояния $\sigma^*, \dot{\epsilon}^*$, вектор скорости радиального перемещения v_ρ , отнесенный к величине $\dot{\epsilon}^* b$, где b – ширина полосы, все линейные размеры считаются поделенными на величину b ($\rho = r/b$; $l = l/b$), m_0 – постоянная материала, $\beta = \beta(\xi)$, где ξ – приведенная температура /6/.

Граничные условия будут формулироваться в процессе решения задачи.

3. Определение разрешающей функции. Зависимости (2.2) подставим в условие несжимаемости (2.3). Имеем

$$\frac{\partial v_\rho}{\rho} + \frac{v_\rho}{\rho} = 0. \quad (3.1)$$

Интеграл полученного дифференциального уравнения будет равен

$$v_\rho = \frac{K(\alpha)}{\rho}, \quad (3.2)$$

где $K(\alpha)$ – неизвестная функция, подлежащая установлению.

Воспользовавшись (3.2), для компонент скоростей деформаций можем записать

$$\dot{\varepsilon}_\rho = -\frac{k(\alpha)}{\rho^2}; \quad \dot{\varepsilon}_\alpha = \frac{k(\alpha)}{\rho^2}; \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = \frac{k'(\alpha)}{\rho^2}. \quad (3.3)$$

Интенсивность скоростей деформаций определяется известной формулой

$$\dot{\varepsilon}_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\dot{\varepsilon}_\rho - \dot{\varepsilon}_\alpha)^2 + (\dot{\varepsilon}_\alpha - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_\rho)^2 + \frac{3}{2} (\dot{\gamma}_{\rho\alpha}^2 + \dot{\gamma}_{\alpha z}^2 + \dot{\gamma}_{z\rho}^2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

В условиях радиального течения $\dot{\varepsilon}_z = \dot{\gamma}_{\alpha z} = \dot{\gamma}_{z\rho} = 0$. Следовательно,

$$\dot{\varepsilon}_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\dot{\varepsilon}_\rho - \dot{\varepsilon}_\alpha)^2 + \dot{\varepsilon}_\alpha^2 + \dot{\varepsilon}_\rho^2 + \frac{3}{2} \dot{\gamma}_{\rho\alpha}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Подставив (3.3) в (3.5), для интенсивности скоростей деформаций получим

$$\dot{\varepsilon}_u = \frac{1}{\rho^2} L^{\frac{1}{2}}(\alpha), \quad (3.6)$$

где

$$L(\alpha) = \frac{1}{3} [4k^2(\alpha) + k'^2(\alpha)]. \quad (3.7)$$

Определяющие соотношения (2.4) с учетом (3.6), (3.7) примут вид

$$\sigma_\rho - \sigma_0 = -\frac{2}{3} T(\alpha, \rho) k(\alpha); \quad \sigma_\alpha - \sigma_0 = \frac{2}{3} T(\alpha, \rho) k(\alpha); \quad \tau_{\rho\alpha} = \frac{1}{3} T(\alpha, \rho) k'(\alpha), \quad (3.8)$$

причем

$$T(\alpha, \rho) = (1 - m_0 - \beta) L^{\frac{1}{2}}(\alpha) + \frac{3m_0 + \beta}{\rho^2} - \frac{3m_0}{\rho^4} L^{\frac{1}{2}}(\alpha) + \frac{m_0}{\rho^6} L(\alpha). \quad (3.9)$$

Очевидно, что составляющие напряжений, скоростей перемещений и деформаций будут найдены, если установлен явный вид функции $k(\alpha)$, которую назовем разрешающей.

Для описания вида функции $k(\alpha)$ поставим соотношение (3.8) в дифференциальное уравнение (2.1). Имеем

$$3\frac{\partial \sigma_0}{\partial \rho} = 2\frac{\partial T}{\partial \rho}k - \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \alpha}k' - \frac{1}{\rho}Tk'' + \frac{4}{\rho}Tk'; \quad 3\frac{\partial \sigma_0}{\partial \alpha} = -\rho\frac{\partial T}{\partial \rho}k' - 2\frac{\partial T}{\partial \alpha}k - 4Tk'. \quad (3.10)$$

Продифференцируем первое равенство (3.10) по α , а второе – по ρ .

$$3\frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial \rho \partial \alpha} = 2\frac{\partial^2 T}{\partial \rho \partial \alpha}k + 2\frac{\partial T}{\partial \rho}k' - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2}k' - \frac{2}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \alpha}k'' - \frac{1}{\rho}Tk''' + \frac{4}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \alpha}k + \frac{4}{\rho}Tk';$$

$$3\frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial \rho \partial \alpha} = 5\frac{\partial T}{\partial \rho}k' - \rho\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}k' - 2\frac{\partial^2 T}{\partial \rho \partial \alpha}k - 4\frac{\partial T}{\partial \rho}k'. \quad (3.11)$$

Приравняв друг другу правые части выражений (3.11), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$4\frac{\partial^2 T}{\partial \rho \partial \alpha}k + 7\frac{\partial T}{\partial \rho}k' + \rho\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}k' - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2}k' - \frac{2}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \alpha}k'' - \frac{1}{\rho}Tk''' + \frac{4}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \alpha}k - \frac{4}{\rho}Tk' = 0. \quad (3.12)$$

Несложно показать, что уравнение (3.12) удовлетворяется при условии, что разрешающая функция $k=k(\alpha)$ будет определяться интегрированием однородного дифференциального уравнения

$$k''' + 4k' = 0. \quad (3.13)$$

Решение уравнения (3.13) имеет вид

$$k(\alpha) = \frac{1}{2}c_1 \sin 2\alpha - \frac{1}{2}c_2 \cos 2\alpha + c_3, \quad (3.14)$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные интегрирования.

Одно граничное условие в форме равенства нулю касательного напряжения при $\alpha=0$ можно записать в форме

$$\tau_{\rho\alpha}|_{\alpha=0} = 0. \quad (3.15)$$

Это условие равносильно $k'(0)=0$ (третья формула (3.8) и, естественно, получается, что $c_0=0$. С учетом этого будем иметь

$$k(\alpha) = \frac{1}{2}c_1 \sin 2\alpha + c_3. \quad (3.16)$$

Далее полагаем, что контактное усилие равняется действующему касательному напряжению, которое составляет часть максимального касательного напряжения /7/.

Иными словами

$$\tau_{\rho\alpha}\bigg|_{\alpha=\frac{\alpha^*}{2}} = -\chi \tau_{\max}\bigg|_{\alpha=\frac{\alpha^*}{2}}, \quad (3.17)$$

где χ – коэффициент пропорциональности, устанавливаемый экспериментально, причем знак (-) относится к зоне отставания, а знак (+) – к зоне опережения.

Величина $\tau_{\max}$ определяется известной формулой

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_\rho - \sigma_\alpha)^2 + 4\tau_{\rho^2\alpha}^2}. \quad (3.18)$$

Подставляя в (3.17), (3.18) компоненты напряжений (3.8) при $\alpha = \alpha^*/2$, после несложных преобразований получим формулу связи между постоянными c_1 и c_2 в виде

$$c_3 = \frac{c_1}{2} \psi(\alpha^*, \chi), \quad (3.19)$$

где для $\psi(\alpha^*, \chi)$ получено выражение

$$\psi(\alpha^*, \chi) = \frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\chi} \cos \alpha^* - \sin \alpha^*. \quad (3.20)$$

С учетом (3.19), (3.20) функция $k=k(\alpha)$ (3.18) принимает вид

$$k(\alpha) = \frac{c_1}{2} (\sin 2\alpha + \psi). \quad (3.21)$$

Очевидно, что явное выражение для разрешающей функции $k=k(\alpha)$ будет установлено после определения постоянной c_1 .

4. Анализ поля скоростей перемещений и деформаций. Считаем [1, 8],

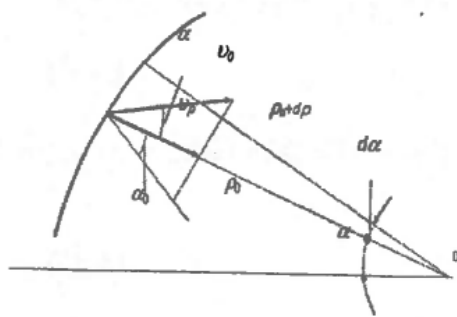


Рис. 3. К выводу уравнения поверхности разрыва скоростей перемещений на входе в очаг деформации.

что очаг деформации представляется в форме клина, ограниченного двумя поверхностями разрыва скоростей $\rho_1=\rho_1(\alpha)$, $\rho_2=\rho_2(\alpha)$ (рис. 2). Для определения уравнений указанных поверхностей запишем сначала условия равенства скоростей, нормальных поверхности разрыва слева и справа на входе в валки (рис.3)

3). Имеем

$$v_0 \cos(\alpha + \alpha_p) = v_p \cos \alpha_p, \quad (4.1)$$

причем v_0 будем рассматривать как среднюю скорость перемещения металла на входе в очаг деформации, а v_p , как и выше, скорость радиального перемещения.

Далее, решая (4.1) относительно v_p , получаем:

$$v_p = v_0 (\cos \alpha - \sin \alpha \tan \alpha_p), \quad (4.2)$$

Здесь [5]

$$\tan \alpha_p = -\frac{d\rho_1}{\rho_1 d\alpha}. \quad (4.3)$$

Поскольку для величины v_p записано выражение (3.2), то используя (4.2) и (4.3)

$$\frac{k(\alpha)}{\rho_i} = v_0 \left(\cos \alpha + \sin \alpha \frac{d\rho_i}{\rho_i d\alpha} \right);$$

или

$$\frac{k(\alpha)}{\rho_i} = v_0 \left(\cos \alpha + \sin \alpha \frac{\rho_i'}{\rho_i} \right). \quad (4.4)$$

После приведения (4.4) к общему знаменателю правую часть выражения (4.4) можно свернуть и переписать так

$$k(\alpha) = v_0 (\rho_i \sin \alpha)'. \quad (4.5)$$

Интегрируя (4.5), будем иметь

$$\int_0^\alpha k(\alpha) d\alpha = v_0 \rho_i \sin \alpha. \quad (4.6)$$

Левая часть равенства (4.6) легко вычисляется, если подставить в него (3.24) имеем

$$\frac{c_1}{2} \int_0^\alpha (\sin 2\alpha + \psi) d\alpha = \frac{c_1}{4} (2\psi\alpha - 1 - \cos 2\alpha). \quad (4.7)$$

Приравняв друг другу (4.6) и (4.7), для функции $\rho_1 = \rho_1(\alpha)$ получаем

$$\rho_1 = \frac{c_1}{4v_0} \frac{2\psi\alpha - 1 - \cos 2\alpha}{\sin \alpha}. \quad (4.8)$$

Аналогично (4.8) получаем уравнение для поверхности разрыва скоростей на выходе из валков в виде

$$\rho_2 = \frac{c_1(1-\Lambda)}{4v_0} \frac{2\psi\alpha - 1 - \cos 2\alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.9)$$

где Λ – обжатие полосы (1.1), причем уравнение (4.9) получено с привлечением условия несжимаемости.

Вычислим теперь секундный объем, проходящий через поверхность $\rho_1 = \rho_1(\alpha)$ в очаге деформации

$$W_c = \iint_A v_\rho|_{\rho=\rho_1} dA, \quad (4.10)$$

Здесь A – площадь поверхности $\rho_1 = \rho_1(\alpha)$.

Если учесть, что в цилиндрических координатах элемент площади $dA = \rho d\alpha dz$, то для секундного объема, приходящегося на единицу ширины полосы, получим

$$W_c = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_\rho|_{\rho=\rho_1} \rho_1 d\alpha. \quad (4.11)$$

Примем во внимание формулу (3.2), которая при $\rho = \rho_1$ будет иметь вид

$$v_\rho \Big|_{\rho=\rho_1} = \frac{k(\alpha)}{\rho_1}. \quad (4.12)$$

Подставив (4.12) в (4.11), можем записать

$$W_c = 2 \int_0^{\frac{\alpha^*}{2}} k(\alpha) d\alpha. \quad (4.13)$$

Определенный интеграл (4.13) будет, используя (4.7), равен

$$W_c = \frac{c_1}{2} (\psi \alpha^* + 1 - \cos \alpha^*). \quad (4.14)$$

Воспользовавшись теперь теоремой о среднем, получим

$$2 \int_0^{\frac{\alpha^*}{2}} k(\alpha) d\alpha = v_0 \alpha^*. \quad (4.15)$$

Из сопоставления (4.14) и (4.15) установим величину c_1 , которая будет определяться выражением

$$c_1 = \frac{v_0}{\bar{\psi}}, \quad (4.16)$$

где

$$\bar{\psi} = \frac{\alpha^*}{1 + \psi \alpha^* - \cos \alpha^*}, \quad (4.17)$$

причем для $\psi = \psi(\alpha^*, \chi)$ имеем выражение (3.23).

Теперь в окончательном выражении можно привести формулы для определения

– разрешающей функции

$$k(\alpha) = \frac{v_0}{\bar{\psi}} (\sin 2\alpha + \psi); \quad (4.18)$$

– скорости радиального перемещения

$$v_\rho = \frac{v_0}{\bar{\psi} \rho} (\sin 2\alpha + \psi); \quad (4.19)$$

– функции $\rho_1(\alpha)$, $\rho_2(\alpha)$, ограничивающих в радиальном направлении очаг пластической деформации

$$\rho_1(\alpha) = \frac{2\psi\alpha - 1 - \cos 2\alpha}{2\bar{\psi} \sin \alpha}; \quad \rho_2(\alpha) = (1 - \Lambda) \frac{2\psi\alpha - 1 - \cos 2\alpha}{2\bar{\psi} \sin \alpha}; \quad (4.20)$$

– скоростей деформаций

$$\dot{\varepsilon}_\rho = -\frac{v_0}{\rho^2 \bar{\psi}} (\sin 2\alpha + \psi); \quad \dot{\varepsilon}_\alpha = \frac{v_0}{\rho^2 \bar{\psi}} (\sin 2\alpha + \psi); \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = \frac{2v_0}{\bar{\psi}} \cos 2\alpha. \quad (4.21)$$

Здесь для $\psi = \psi(\alpha^*, \chi)$ $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\alpha^*, \psi)$ соответственно получено (3.23), (4.17).

Автор выражает благодарность проф. Я.И.Рудаеву и доц. С.М.Сулаймановой за оказанную помощь в этой работе.

Список литературы

1. Малинин Н.Н. Технологические задачи пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1979. – 119 с.
2. Никитин Г.С. Теория непрерывной продольной прокатки. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2009. – 400 с.
3. Рудской А.И., Лунев В.А. Теория и технология прокатного производства. – СПб.: Наука, 2005. – 540 с.
4. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Наука, 1969.
5. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
6. Рудской А.И., Рудаев Я.И. Механика динамической сверхпластичности алюминиевых сплавов. – СПб.: Наука. – 218 с.
7. Кийко И.А. Пластическое течение металлов/ Научные основы прогрессивной техники и технологий. – М.: Машиностроение, 1985. – С. 105-133.
8. Рудаев Я.И. Моделирование прессопрокатки листа с использованием сверхпластичности // Научно-технические ведомости СПбО ГПУ. – 2005. – № 2. – С. 57-64.