

УДК 28.8

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ СОБЫТИЙ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

**Акаева А. А. Муралиев А. М.**  
КГТУ им. И.Раззакова

В данной статье рассмотрен вопрос статистической оценки распределения сейсмических событий за 2021 год. Для проведения статистической оценки использован метод максимального правдоподобия. Выборка сейсмических событий проведена на основе каталога землетрясений за 2021-год. Результат показан в виде графика распределения.

**Ключевые слова:** сейсмические события, метод максимального правдоподобия, выборка, каталог.

## МАКСИМАЛДУУ ЫКТЫЯРДЫК ЫКМАСЫ МЕНЕН ЖЕР ТИТИРӨӨЛӨРДҮН БӨЛҮШТҮРҮЛҮШҮНҮН СТАТИСТИКАЛЫК БААЛООСУ

**Акаева А. А., Муралиев А. М.**  
И.Раззаков атындагы КМТУ

Макалада 2021 жылы болгон жер титирөөлөрдүн бөлүштүрүлүшүнүн статистикалык баалоо маселеси каралган. Статистикалык баалоону изилдөө үчүн максималдуу ыктымалдык ыкмасы колдонулган. Сейсмикалык окуяларды тандоо, 2021 жылда болгон жер титирөөлөрдүн каталогунун негизинде жүргүзүлгөн. Натыйжа бөлүштүрүү графиги түрүндө көрсөтүлгөн.

**Баштапкы сөздөр:** сейсмикалык окуялар, максималдуу ыктымалдык ыкмасы, тандоо, каталог.

## STATISTICAL EVALUATION OF SEISMIC EVENTS BY THE MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD

**Akaeva A. K., Muraliev A. M.**  
KSTU named after. I.Razzakov

This article considers the issue of statistical estimation of seismic event distribution for 2021. The maximum likelihood method was used for statistical estimation. The seismic events were sampled based on the catalog of earthquakes for the year 2021. The result is shown in the form of a distribution graph.

**Key words:** seismic events, maximum likelihood method, sampling, catalog.

Каждый год, на Земле происходят более 100 000 сейсмических событий, согласно данным NEIC [7]. Из этого числа ощутимыми являются примерно 10%. Наблюдения показывают, что все сейсмические события распределены неравномерно. Следовательно, перед учёными возникает вопрос оценки распределения сейсмических событий. Вероятностное знание распределения землетрясений даёт возможность прогнозирования землетрясений и его интенсивности.

Целью исследования является проведение статистической оценки распределения сейсмических событий для территории Кыргызстана за 2021 год, методом максимального правдоподобия. Изучение величины наклона графика повторяемости  $\gamma$ , отражающая распределение числа землетрясений по их энергии и широко используемая для характеристики сейсмического процесса.

Материалом исследования представлен каталог сейсмических событий за 2021 год. Данные для каталога были получены из Центра Данных Института Сейсмологии.

Для статистической оценки распределения сейсмических событий был выбран метод максимального правдоподобия.

**Метод максимального правдоподобия.** Этот метод был рекомендован Р. Фишером в 1912-1922 годах [8]. Является одним из самых популярных статистических методов в математической статистике, который используется в построении статистической модели, на основе использования данных. Метод основан на том, что

неизвестные параметры-  $\theta \in \Theta$  оцениваются способом максимизации функции правдоподобия- $L(x|\theta): \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ .

Пусть есть выборка  $X_1, \dots, X_n$ . Значение  $\theta$  – это «наиболее правдоподобное» значение параметра. Он является искомой оценкой и зависит от выборки  $X_1, \dots, X_n$ .

Рассмотрим вопрос вероятности получить данную выборку, то есть рассмотрим вопрос, что именно необходимо максимизировать. Функция  $f_0(y) \begin{cases} \text{плотность } f_0(y), & \text{если распределение } \mathcal{F}_0 \text{ абсолютно непрерывно} \\ P_\theta(X_1 = y), & \text{если распределение } \mathcal{F}_0 \text{ дискретно} \end{cases}$  называется плотностью распределения  $\mathcal{F}_0$ . Если  $X_1$  имеет дискретное распределения со значениями  $a_1, a_2$ , тогда

$$P_\theta(X_1 \in B) = \int_B f_\theta(y) \#(dy) = \int_B P_\theta(X_1 = y) \#(dy) = \sum_{a_i \in B} P_\theta(X_1 = a_i) \quad (1)$$

Если  $X_1$  имеет абсолютно непрерывное распределение,  $f_\theta(y)$  есть привычная плотность относительно меры Лебега  $\lambda(dy) = dy$

$$P_\theta(X_1 \in B) = \int_B f_\theta(y) \lambda dy = \int_B f_\theta(y) dy \quad (2)$$

Функцией правдоподобия является:

$$f(X, \theta) = f_\theta(X_1) * f_\theta(X_2) * \dots * f_\theta(X_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i) \quad (3)$$

Логарифмической функцией правдоподобия является:

$$L(X, \theta) = \ln f(X, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f_\theta(X_i) \quad (4)$$

Оценкой максимального правдоподобия является параметр  $\hat{\theta}$ . Значение, при котором функция  $f(X, \theta)$  достигает своего максимума (при фиксированных  $X_1, \dots, X_n$ ) называется неизвестный параметр  $\theta$

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} f(X, \theta) \quad (5)$$

Точки максимума  $f(X, \theta)$  и  $L(X, \theta)$  совпадают, поскольку  $\ln y$  монотонна. И следовательно, оценкой максимального правдоподобия можно называть точку максимума ( $\theta$ ) функции  $L(x, \theta)$ . И поэтому

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(X, \theta) \quad (6)$$

Необходимо вычислить наклон графика повторяемости землетрясений- параметра  $\gamma$  по методу максимального правдоподобия. Для вычисления параметра  $\gamma$  применяется формула Кулдорфа.

Параметр  $\gamma$  сейсмического режима вычисляется по формуле

$$\gamma = -\log \left( 1 + \frac{\sum_{K=K_0}^{K_{max}} N_K}{0 * N_{K_0} + 1 * N_{K_0+1} + 2 * N_{K_0+2} + \dots} \right) \quad (7)$$

Таблица 1 содержит количество землетрясений, которые распределены по классу энергии. Для составления таблицы был использован каталог землетрясений за 2021-год.

Таблица 1. Количество землетрясений, распределённые по классам.

K	9	10	11	12	13
N	100	33	10	3	1

Используя данные с таблицы 1 для формулы, был получен нижеследующий результат

$$\begin{aligned} \gamma &= -\log \left( 1 + \frac{147}{0 * 100 + 1 * 33 + 2 * 10 + 3 * 3 + 4 * 0} \right) = \\ &= -\log \left( 1 + \frac{147}{62} \right) = -\log(3,37) = -0,528 \end{aligned}$$

$$\gamma = -0,528$$

Погрешность  $\delta$  параметра  $\gamma$ , вычисляется по формуле

$$\delta_\gamma = \frac{0,528}{\sqrt{147}} = \frac{0,528}{12,1243} = 0,043$$

$$\gamma = -0,528 \pm 0,043$$

Уточнённая формула Кулдорфа [1]:

$$\begin{cases} \gamma = \lg \left[ 1 + \frac{N_\Sigma}{\sum j N(K_0+j)} \right]; \\ \delta_\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{N_\Sigma}} \end{cases} \quad (8)$$

где  $N(K_0)$ - число землетрясений минимального используемого класса  $K_0$ .

Построен график повторяемости землетрясений. Вычисление наклона графика повторяемости землетрясений основывается на нахождении параметра  $\gamma$ .

Параметр  $\gamma$  сейсмического режима возможно вычислить методом наименьшего квадрата.

Метод наименьшего квадрата в регрессионном анализе (аппроксимации данных)

Задача заключается в том, чтобы взаимосвязь между значениями  $y$ ,  $x$  аппроксимировать некоторой функцией  $f(x,b)$ , известной до некоторых параметров  $b$

Параметры  $K$ -энергетический класс и  $N$ -количество сейсмических событий, являются главными параметрами для построения графика повторяемости землетрясений. Для построения графика необходимо посчитать десятичный логарифм от значения  $N$ - количества сейсмических событий

Необходимо вычислить десятичный логарифм от количественных значений сейсмических событий. Десятичный логарифм — логарифм по основанию 10. Другими словами, десятичный логарифм числа.

$$Lgx = \log_{10}x$$
$$10^x = b$$

$\log_{10} 100 = 2$ ;  $\log_{10} 33 = 1,52$ ;  $\log_{10} 10 = 1$ ;  $\log_{10} 3 = 0,48$ ;  $\log_{10} 1 = 0$ ;  
По результатам вычисления построена новая таблица для построения графика повторяемости.

K	9	10	11	12	13
LgN	2	1.52	1	0.48	0

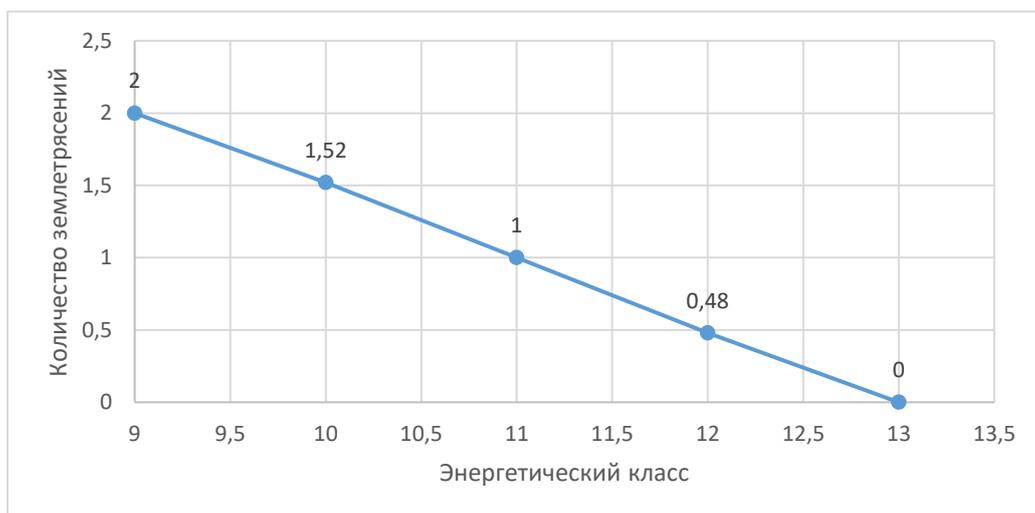


Рис. 1. График повторяемости сейсмических событий.

График повторяемости аппроксимируются в первом приближении линейными зависимостями; параметр-наклон графика имеют смысл геометрический. Линейная зависимость параметра выражается корреляционной формулой  $y = -0.4307x + 2,6571$ . Наклон графика повторяемости равняется  $\gamma = -0,4307$ . Анализируя наклон графика повторяемости, можно прийти к выводу, что сейсмические события энергетического класса  $K=9$  повторяются намного чаще чем сейсмические события других энергетических классов. Выявлена закономерность, что чем выше энергетический класс, тем ниже повторяемость землетрясений. Повторяемость сейсмических событий энергетического класса  $K=12$  и  $K=13$  имеет низкую вероятность и приближены к нулю.

Проведена оценка распределения сейсмических событий за 2021 год, для территории Кыргызстана, методом максимального правдоподобия. Исследована величина параметра  $\gamma$  повторяемости землетрясений во времени. Найдено значение параметра  $\gamma$  повторяемости землетрясений за 2021 год, с энергетическим классом от  $K=9$  до  $K=13$ . Значение наклона графика повторяемости равно 0,528. Построен график повторяемости землетрясений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Джанузаков К.Д., Мирзобаев Х.М., Касымов С.М., Муралиев А.М. и др. Исфара-Баткенское землетрясение 31 января 1977 г. // Землетрясения в СССР в 1977г. М.: Наука, 1981. с. 41-47.
2. Гельфанд И.М., Губерман Ш.А., Избекова М.П., Кейлис-Борок В.И., Ранцман Е.Я. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. Памир и Тянь-Шань // Сборник «Вычислительные и статистические методы интерпретации сейсмических данных». (Вычислительная сейсмология. Вып.6). М., «Наука», 1973. С. 107-133.
3. Муралиев А.М. Положение плоскости разрыва в очагах Исфара-Баткенского и Хайдаркенского землетрясений/ /Геофизические исследования сейсмогенных зон Киргизии. Фрунзе: Илим. 1983. с.143-150.

4. Джанузаков К.Д., Мирзобаев Х.М., Касымов С.М., Муралиев А.М. и др. ИсфараБаткенское землетрясение 31 января 1977г.// Землетрясения в СССР в 1977 г. М.: Наука, 1981. с.41-47.
5. Муралиев А.М. Сейсмичность и сеймотектоническая деформация Юго-Западной Киргизии и сопредельных территории. Бишкек, Илим. 105 с.
6. Моги К. Предсказание землетрясений. Москва «Мир».1988. с 68-74.
7. <https://www.usgs.gov/programs/earthquake-hazards/earthquakes>
8. Фишер -1912 г. Математический энциклопедический словарь, М.: Советская энциклопедия, 1988.