

РАСЧЕТ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ, ОГРАНИЧЕННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ МЕТОДОМ БИХАРАКТЕРИСТИК

При расчете волновых полей в призматических телах, ограниченных криволинейными поверхностями, приходится рассматривать граничные поверхности тела, не совпадающие в физическом пространстве с координатными (линиями) плоскостями. Для конечно-разностных методов это приводит к тому, что при постановке граничных условий требуется применять сложную интерполяцию на линии локальной сетки, из-за чего происходит локальная потеря точности численного решения. Применяя примитивное преобразование, физическая область отображается в вычислительную область. Границы которой совпадают с координатными плоскостями в новой системе координат. В данной работе метод бихарактеристик применен к расчету нестационарных полей напряжений и скоростей частиц в призматических телах, ограниченных криволинейными поверхностями.

Основные уравнения. Процесс распространения динамических возмущений в изотропной линейной упругой среде описывается системой линейных уравнений в частных производных гиперболического типа

$$\begin{cases} \partial V_\alpha / \partial t - \sigma_{\alpha i, i} = 0, \\ \partial \sigma_{\alpha\beta} / \partial t - \lambda V_{i, i} \cdot \delta_{\alpha\beta} - \mu (V_{\alpha, \beta} + V_{\beta, \alpha}) = 0, \quad (\alpha, \beta, i = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь λ, μ - постоянные Ламе, запятая перед индексом означает дифференцирование по соответствующей переменной, $\delta_{\alpha\beta}$ - символы Кронекера. По повторяющимся латинским индексам производится суммирование от 1 до 3. Безразмерные компоненты вектора скорости V_α , тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, время t и декартовы координаты x_α определяются через соответствующие размерные величины:

$$x_\alpha = \frac{\overline{x_\alpha}}{l}, \quad t = \frac{\overline{t} \cdot c_1}{l}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\overline{\sigma_{\alpha\beta}}}{\rho c_1^2}, \quad V_\alpha = \frac{\overline{V_\alpha}}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (2)$$

где черта над переменной означает размерную величину, l - характерная длина, c_1 - скорость распространения продольной волны, ρ - плотность среды.

Постановка задачи. Рассматривается трехмерное тело, занимающее область $D = \{0 \leq x_1 \leq a, \dots, 0 \leq x_2 \leq b, \dots, 0 \leq x_3 \leq f(x_2)\}$, которое в начальный момент времени $t=0$ находится в состоянии покоя

$$\sigma_{ij}=0, V_i=0 \text{ при } t=0. \quad (3)$$

В любой другой момент времени $t > 0$ на грани $x_2 = 0$ действует равномерно распределенная нестационарная нагрузка

$$\sigma_{22} = f(t), \sigma_{21} = \sigma_{23} = 0 \text{ при } x = 0. \quad (4)$$

Грань $x_2 = b$ жестко закреплена

$$V_1 = V_2 = V_3 = 0 \text{ при } x_2 = b. \quad (5)$$

Остальные грани свободны от какого-либо воздействия, т.е. $\sigma_{ij}n_j = 0$ (n_j - компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности)

$$\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \text{ где } x_1 = a. \quad (6)$$

$$\sigma_{33} = 0, \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \text{ где } x_3 = 0. \quad (7)$$

На поверхности $x_3 = f(x_2)$ вектор полного напряжения $\vec{P}_v(P_1, P_2, P_3)$ имеет составляющие по осям x_1, x_2, x_3 соответственно P_1, P_2, P_3

$$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0 \text{ где } x_3 = f(x_2). \quad (8)$$

т.е. элемент поверхности dS , нормаль к которому $\vec{v}$, можно рассматривать как косую площадку и условие на этой поверхности (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11}l + \sigma_{12}m + \sigma_{13}h &= P_1, \\ \sigma_{21}l + \sigma_{22}m + \sigma_{23}h &= P_2, \\ \sigma_{31}l + \sigma_{32}m + \sigma_{33}h &= P_3. \end{aligned} \quad (8^1)$$

$l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta$, $n = \cos \gamma$ - направляющие косинусы нормального вектора $\vec{v}$ к поверхности $x_3 = f(x_2)$, α, β, γ - углы, составляемые нормальным вектором $\vec{v}$ с координатными осями x_1, x_2, x_3 .

Задача заключается в определении нестационарных полей напряжений и скоростей частиц тела, вызванных внешним динамическим воздействием.

Задача решается численно методом бихарактеристик. Переходя к новым координатам

$$\bar{x}_1 = x_1, \bar{x}_2 = x_2, \bar{x}_3 = x_3 / h(x_2), \quad (9)$$

отобразим физическую область в вычислительную область в виде прямоугольного параллелепипеда [1]. Исходная система дифференциальных уравнений (1) с частными производными при переходе от физических координат к координатам в вычислительной области преобразуется при помощи правила дифференцирования сложной функции

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} - x_3 \cdot \frac{h'(x_2)}{h(x_2)} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{1}{h(x_2)} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \end{cases} \quad (10)$$

$h(x_2)$ - расстояние между поверхностями $x_3 = 0$, $x_3 = f(x_2)$ при $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$

Тогда преобразованная система уравнений (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial V_1}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} - g_{23} \cdot \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_3} - g_{33} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \\
 & \frac{\partial V_2}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} - g_{23} \cdot \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_3} - g_{33} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0, \\
 & \frac{\partial V_3}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} - g_{23} \cdot \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} - g_{33} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0, \\
 & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} - a_{11} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - a_{12} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} - a'_{12} \frac{\partial V_2}{\partial x_3} - a_{13}'' \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0, \\
 & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} - a_{21} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - a_{22} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} - a'_{22} \frac{\partial V_2}{\partial x_3} - a_{23}'' \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0, \\
 & \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} - a_{31} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - a_{32} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} - a'_{32} \frac{\partial V_2}{\partial x_3} - a_{33}'' \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0, \\
 & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} - a_{44} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - a_{44}' \cdot \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - a_{44} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = 0, \\
 & \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial t} - a_{55}'' \cdot \frac{\partial V_2}{\partial x_3} - a_{55} \cdot \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - a_{55}' \cdot \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0, \\
 & \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial t} - a_{66}'' \cdot \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - a_{66} \cdot \frac{\partial V_3}{\partial x_1} = 0. \\
 & g_{23} = -\frac{h'(x_2)}{x_3}, \quad g_{33} = \frac{1}{h(x_2)}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь метрические коэффициенты, в декартовых прямоугольных координатах $g_{23}=0$, $g_{33}=1$,

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda + 2\mu, & \text{при } i \leq 3, \dots, i = j, \\ \mu, & \text{при } i > 3, \dots, i = j, \\ \lambda, & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

$$a'_{ij} = a_{ij} \cdot g_{23}, \quad a''_{ij} = a_{ij} \cdot g_{33}.$$

В системе уравнений (11) появляются дополнительные члены, коэффициенты которых зависят от координаты x_2 , x_3 , определяющие отображение физической области на вычислительную область. Система (11) девяти уравнений в частных производных первого порядка относительно $V_i, \sigma_{ij} (i, j = \overline{1,3})$ принадлежит гиперболическим системам.

Физическая область отображается в прямоугольную вычислительную область в форме прямоугольного параллелепипеда. Задача решается в вычислительной области. При переходе в вычислительную область граничные условия (4'-7') не изменяются, т.е.

$$\sigma_{22}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3; t) = (t), \sigma_{21}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3; t) = \sigma_{23}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3; t) = 0 \text{ при } \bar{x}_2 = 0, \quad (4^1)$$

$$V_1 = V_2 = V_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3; t) = 0 \text{ при } \bar{x}_2 = b, \quad (5^1)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3; t) = 0 \text{ при } \bar{x}_1 = 0, a, \quad (6^1)$$

$$\sigma_{33}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3; t) = 0, \sigma_{31}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3; t) = \sigma_{32}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3; t) = 0 \text{ при } \bar{x}_3 = 0. \quad (7^1)$$

Грань $x_3 = f(x_2)$ преобразуется в плоскость $\bar{x}_3 = 1$, тогда условие (8) преобразуется

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t)l^1 + \sigma_{12}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t)m^1 + \sigma_{13}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t)n^1 &= P_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t), \\ \sigma_{21}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t)l^1 + \sigma_{22}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t)m^1 + \sigma_{23}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t)n^1 &= P_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t), \text{ при } \bar{x}_3 = 1 \\ \sigma_{31}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t)l^1 + \sigma_{32}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t)m^1 + \sigma_{33}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t)n^1 &= P_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t). \end{aligned} \quad (8^1)$$

где

$$l^1 = \cos \alpha^1, m^1 = \cos \beta^1, n^1 = \cos \gamma^1, \alpha^1 = (\bar{x}_1, \bar{v}^1) = \pi/2, \beta^1 = (\bar{x}_2, \bar{v}^1) = \pi/2, \gamma^1 = (\bar{x}_3, \bar{v}^1) = 0 \quad (*)$$

$\bar{v}^1$ – нормальный вектор плоскости $\bar{x}_3 = 1$ совпадает с направлением оси $\bar{x}_3$.

Если учитывать условие (*) то из условия (8') получим ($l^1=0, m^1=0, n^1=1$)

$$\sigma_{13}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t) = P_1, \sigma_{23}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t) = P_2, \sigma_{33}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t) = P_3 \quad (8^2)$$

В дальнейшем задача решается при граничных условиях (4', 5', 6', 7', 8').

Расщепление многомерных систем на одномерные. Бихарактеристики и условия на них. Следуя работе [2], поочередно зафиксировав два из трех пространственных переменных, расщепляем систему (11) на одномерные, зависящие от двух независимых переменных x_i, t

$$x_2 = const, \dots, x_3 = const$$

$$1) \begin{cases} V_{1,t} - \sigma_{11,1} = \sigma_{12,2} + g_{23}\sigma_{12,3} + g_{33}\sigma_{13,3}, \\ \sigma_{11,t} - a_{11}V_{1,1} = a_{12}V_{2,2} + a'_{12}V_{2,3} + a''_{13}V_{3,3}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} V_{2,t} - \sigma_{21,1} = \sigma_{22,2} + g_{23}\sigma_{22,3} + g_{33}\sigma_{23,3}, \\ \sigma_{21,t} - a_{44}V_{2,1} = a_{44}V_{1,2} + a'_{44}V_{1,3}. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} V_{3,t} - \sigma_{31,1} = \sigma_{32,2} + g_{23}\sigma_{32,3} + g_{33}\sigma_{33,3}, \\ \sigma_{31,t} - a_{66}V_{3,1} = a''_{66}V_{1,3}. \end{cases}$$

$$x_3 = const, \dots, x_1 = const$$

$$4) \begin{cases} V_{1,i} - (\sigma_{12,2} + g_{23} \sigma_{12,3}) = \sigma_{11,1} + g_{33} \sigma_{12,3}, \\ \sigma_{12,i} - a_{44} (V_{1,2} + g_{23} V_{1,3}) = a_{44} V_{2,i}. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} V_{2,i} - (\sigma_{22,2} + g_{23} \sigma_{22,3}) = \sigma_{21,1} + g_{23} \sigma_{22,3}, \\ \sigma_{22,i} - a_{22} (V_{2,2} + g_{23} V_{2,3}) = a_{21} V_{1,i} + a_{23}'' V_{3,3}. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} V_{3,i} - (\sigma_{32,2} + g_{23} \sigma_{32,3}) = \sigma_{31,1} + g_{33} \sigma_{33,3}, \\ \sigma_{32,i} - a_{55} (V_{3,2} + g_{23} V_{3,3}) = a_{55}'' V_{2,3}. \end{cases}$$

$$x_1 = const, \dots, x_2 = const.$$

$$7) \begin{cases} V_{1,i} - g_{33} \sigma_{13,3} = \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + g_{23} \sigma_{12,3}, \\ \sigma_{13,i} - a_{66}'' V_{1,3} = a_{66} V_{3,i}. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} V_{2,i} - g_{33} \sigma_{23,3} = \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + g_{23} \sigma_{22,3}, \\ \sigma_{23,i} - a_{55}'' V_{2,3} = a_{55} V_{3,2} + a_{55}' V_{3,3}. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} V_{3,i} - g_{33} \sigma_{33,3} = \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + g_{23} \sigma_{32,3}, \\ \sigma_{33,i} - a_{33}'' V_{3,3} = a_{31} V_{1,i} + a_{32} V_{2,2} + a_{32}' V_{2,3}. \end{cases}$$

В дальнейшем правые части расщепленных систем уравнений обозначены соответственно $d_i^{(j)}, b_{ij}^{(j)}, \dots, (i, j=1, \dots, 3)$. Верхний индекс j показывает направление расщепления, нижний индекс i показывает номер переменной V_i .

В расщеплении по направлению x_2 в левой части уравнения, в скобках содержатся производные, связанные с этим направлением, второе слагаемое которых в декартовых прямоугольных координатах обращается в нуль. В расщеплении по направлению x_3 эти производные переведены в правую часть уравнения, т.к. коэффициент $g_{23} < 1$, то операторы $g_{23} \sigma_{ij,3}$, $g_{23} V_{i,3}$ учитываются как поправочные, а это дает удобную конструкцию численного алгоритма в данном расщеплении.

Производные функции в направлении бихарактеристик в старых координатах определяется соотношением

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt}$$

Учитывая формулу дифференцирования (10) в новых координатах, это производное определяется соотношением

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{d\bar{x}_1}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + g_{23} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \frac{d\bar{x}_2}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_3} \cdot \frac{d\bar{x}_3}{dt} \dots m.k. \dots \frac{dh(x_2)}{dt} = 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_3} \cdot \frac{d\bar{x}_3}{dt} \dots \dots \dots \text{если} \dots x_1 = x_2 = \text{const} \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{d\bar{x}_1}{dt} \dots \dots \dots \text{если} \dots x_2 = x_3 = \text{const} \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{d}{dt} - \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + g_{23} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot \frac{d\bar{x}_2}{dt} \dots \dots \dots \text{если} \dots x_3 = x_1 = \text{const}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Используя формулу (12), исключив частные производные по t , расщепленные системы можно приводить к виду. Например, при $x_1 = \text{const}, \dots, x_3 = \text{const}$:

$$\begin{cases} -\frac{dx_2}{dt}(V_{1,2} + g_{23} \cdot V_{1,3}) - (\sigma_{12,2} + g_{23} \sigma_{12,3}) = d_1^{(2)} - \frac{dV_1}{dt}, \\ -a_{44}(V_{1,2} + g_{23} V_{1,3}) - \frac{dx}{dt}(\sigma_{12,2} + g_{23} \cdot \sigma_{12,3}) = b_{12}^{(2)}. \end{cases} \tag{13}$$

Данное уравнение имеет две действительных бихарактеристики, вдоль которых выполняются следующие дифференциальные соотношения:

$$\frac{dx_2}{dt} = \pm \sqrt{a_{44}}, \quad d\sigma_{12} \mp \sqrt{a_{44}} dV_1 = (b_{12}^{[2]} \mp \sqrt{a_{44}} d_1^{(2)}) dt. \tag{14}$$

Аналогичным образом определяются бихарактеристики и условия на них в других направлениях. В каждой из трех плоскостей $\{x_\alpha, t\}$ имеется по три семейства бихарактеристик (два из них совпадают). Конечно-разностное уравнение. Численное решение задачи отыскивается на слоях, ограниченных гиперплоскостями $t = \text{const}$ в четырехмерном пространстве (x_α, t) . Для проведения численных расчетов вычислительная область, разбивается плоскостями $x_\alpha = \text{const}$ на элементарные прямоугольные параллелепипеды. Точки пересечения плоскостей $x_\alpha = \text{const}$ являются узловыми точками, которые определяются числами (n_1, n_2, n_3, k) , где $x_\alpha = n_\alpha h_\alpha$, $t = k\tau$, h_α - шаг по пространственной переменной, τ - шаг по времени. Точечные схемы, на основе которых строится разностная схема, помимо упомянутых узловых точек содержат точки, образованные пересечением бихарактеристик с гиперплоскостями $t = k\tau$. Искомый функций в узловой точке A на $k+1$ -ом слое по времени находятся через их известные значения на k -м слое по времени.

Интегрируя дифференциальные соотношения вдоль соответствующих бихарактеристик и исключив из них $\sigma_{\alpha\beta}, V_\alpha$, получим систему уравнений для определения частных производных $\sigma_{\alpha\beta, \beta}, V_{\alpha, \beta}$ на верхнем $k+1$ -м слое по времени.

$$a_{44}(V_{1,2} + g_{23}V_{1,3}) \mp \sqrt{a_{44}}(\sigma_{12,2} + g_{23}\sigma_{12,3}) = b_{12}^{(2)\pm} - b_{12}^0 \mp \sqrt{a_{44}}(d_1^{(2)\pm} - d_1^0) + \frac{2}{\tau} [\sigma_{12}^{(2)\pm} - \sigma_{12}^0 \mp \sqrt{a_{44}}(V_1^{(2)\pm} - V_1^0)] \quad (15)$$

В правой части уравнения содержатся величины из нижнего слоя по времени, знаком "0" обозначены величины переменной в узловой точке, а "±" обозначены значения в точке пересечения бихарактеристик с гиперплоскостью $t=kt$ (с плоскостью начальных данных), которые определяем по формуле Тейлора с точностью первого и второго порядка, соответственно и формулу для определения производных приведем к виду:

$$\sqrt{a_{44}}(V_{1,2} + g_{23}V_{1,3}) \mp (\sigma_{12,2} + g_{23}\sigma_{12,3}) = \sqrt{a_{44}}[(V_{1,2}^0 - g_{23}V_{1,3}^0) + \tau(\sigma_{11,12} + \sigma_{12,22} + g_{33}\sigma_{13,32})^0] \mp [(\sigma_{12,2}^0 - g_{23}\sigma_{12,3}^0) + \omega_{44}(V_{1,22} + V_{2,12})^0] \quad (16)$$

Также уравнений во внутренних точках области в трех направлениях будет 18, которые приведены ниже:

$$\begin{cases} \sqrt{a_{11}}V_{1,1} \mp \sigma_{11,1} = F_{1,2}, \\ \sqrt{a_{44}}V_{2,1} \mp \sigma_{12,1} = F_{3,4}, \\ \sqrt{a_{66}}V_{3,1} \mp \sigma_{13,1} = F_{5,6}, \\ \sqrt{a_{44}}(V_{1,2} + g_{23} \cdot V_{1,3}) \mp (\sigma_{12,2} + g_{23} \cdot \sigma_{12,3}) = F_{7,8}, \\ \sqrt{a_{22}}(V_{2,2} + g_{23} \cdot V_{2,3}) \mp (\sigma_{22,2} + g_{23} \cdot \sigma_{22,3}) = F_{9,10}, \\ \sqrt{a_{55}}(V_{3,2} + g_{23}V_{3,3}) \mp (\sigma_{23,2} + g_{23}\sigma_{23,3}) = F_{11,12}, \\ \sqrt{a_{66}}V_{1,3} \mp \sigma_{13,3} = F_{13,14}, \\ \sqrt{a_{55}}V_{2,3} \mp \sigma_{23,3} = F_{15,16}, \\ \sqrt{a_{33}}V_{3,3} \mp \sigma_{33,3} = F_{17,18}. \end{cases} \quad (17)$$

Правые части которых представляются в виде:

$$\begin{aligned} F_{1,2} &= \sqrt{a_{11}}[V_{1,1}^0 + \tau(\sigma_{11,11} + \sigma_{12,21} + g_{23}\sigma_{12,31} + g_{33}\sigma_{13,31})^0] \mp [\sigma_{11,1}^0 + \tau(a_{11}V_{1,11} + a_{12}V_{2,21} + a'_{12}V_{2,31} + a''_{13}V_{3,31})^0], \\ F_{3,4} &= \sqrt{a_{44}}[V_{2,1}^0 + \tau(\sigma_{12,11} + \sigma_{22,21} + g_{23}\sigma_{22,31} + g_{33}\sigma_{23,31})^0] \mp [\sigma_{12,1}^0 + \tau(a_{44}V_{2,11} + a_{44}V_{1,21} + a'_{44}V_{1,31})^0], \\ F_{5,6} &= \sqrt{a_{66}}[V_{3,1}^0 + \tau(\sigma_{13,11} + \sigma_{23,21} + g_{23}\sigma_{23,31} + g_{33}\sigma_{33,31})^0] \mp [\sigma_{13,1}^0 + \tau(a_{66}V_{3,11} + a''_{66}V_{1,31})^0], \\ F_{7,8} &= \sqrt{a_{44}}[(V_{1,2}^0 - g_{23}V_{1,3}^0) + \tau(\sigma_{11,12} + \sigma_{12,22} + g_{33}\sigma_{13,32})^0] \mp [(\sigma_{12,2}^0 - g_{23}\sigma_{12,3}^0) + \omega_{44}(V_{1,22} + V_{2,12})^0], \\ F_{9,10} &= \sqrt{a_{22}}[(V_{2,2}^0 - g_{23}V_{2,3}^0) + \tau(\sigma_{22,22} + \sigma_{12,12} + g_{33}\sigma_{23,32})^0] \mp [(\sigma_{22,2}^0 - g_{23}\sigma_{23,3}^0) + \tau(a_{22}V_{2,22} + a_{21}V_{1,12} + a''_{23}V_{3,32})^0], \\ F_{11,12} &= \sqrt{a_{55}}[(V_{3,2}^0 - g_{23}V_{3,3}^0) + \tau(\sigma_{23,22} + \sigma_{13,12} + g_{33}\sigma_{33,32})^0] \mp [(\sigma_{23,2}^0 - g_{23}\sigma_{23,3}^0) + \omega_{55}(V_{3,22} + g_{33}V_{2,32})^0], \\ F_{13,14} &= \sqrt{a_{66}}[V_{1,3}^0 + \tau(\sigma_{11,13} + \sigma_{12,23} + g_{23}\sigma_{12,33} + g_{33}\sigma_{13,33})^0] \mp [\sigma_{13,3}^0 + \omega_{66}(g_{33}V_{1,33} + V_{3,13})^0], \\ F_{15,16} &= \sqrt{a_{55}}[V_{2,3}^0 + \tau(\sigma_{12,13} + \sigma_{22,23} + g_{23}\sigma_{22,33} + g_{33}\sigma_{23,33})^0] \mp [\sigma_{23,3}^0 + \omega_{55}(g_{33}V_{2,33} + V_{3,23} + g_{23}V_{3,33})^0], \\ F_{17,18} &= \sqrt{a_{33}}[V_{3,3}^0 + \tau(\sigma_{31,13} + \sigma_{32,23} + g_{23}\sigma_{32,33} + g_{33}\sigma_{33,33})^0] \mp [\sigma_{33,3}^0 + (a_{31}V_{1,13} + a_{32}V_{2,23} + a'_{32}V_{2,33} + a''_{33}V_{3,33})^0]. \end{aligned}$$

Интегрируя систему уравнений (11) по времени τ , подставляя найденные значения производных, находим значения искомых переменных в рассматриваемой узловой точке.

Особенностью расчета точек граничных поверхностей является то, что некоторые бихарактеристики проходят вне рассматриваемой области и пересекают плоскости начальных данных $t=k\tau$ в точках, которые не принадлежат исследуемой области и ее границе. Следовательно, из системы уравнений (17) исключаются три уравнения, соответствующие этим трем бихарактеристикам. Взамен этим трем уравнениям, на граничной поверхности $x_i = \text{const}$ ($i=1,2,3$) задаются три граничные условия.

При расчете ребер, образованных пересечением двух граничных поверхностей, должна выполняться совокупность условий, заданий на этих поверхностях. В этих точках шесть бихарактеристик выходят из рассматриваемой области. Поэтому из системы уравнений (17) исключается шесть уравнений. Взамен исключенных уравнений задается шесть условий на двух граничных поверхностях. Часто граничные условия задаются напряжениями. В этих случаях из-за парности касательных напряжений два из заданных условий становятся на единицу меньше. Некоторые производные могут быть вычислены дифференцированием граничных функций /2/ и тем самым можно получить замкнутую систему.

Расчет трехгранных углов производится аналогично.

На этом заканчивается процесс построения расчетных формул $k+1$ -м слое по времени. Полученный численный алгоритм может быть использован для исследования волновых процессов в телах с ограниченными криволинейными поверхностями.

Список литературы

1. Андерсен Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. - М.: Мир, 1990. – Т.1. – 392с.
2. Тарабрин Г.Т. Численное решение нестационарных задач динамики анизотропной упругой среды //Известия АН СССР. МТТ. – 1982. – № 2. – С. 83-95.