

ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Рассматриваются конечные и полубесконечные односвязные области, контуры которых являются гладкими кривыми, не имеющими точек ветвления и самопересечения. Ранее в работах Н.И. Мусхелишвили /1/ и Б.Жумабаева /2/ отображения осуществлялось по более трудоемкой методике. В этой работе задача прямого и обратного отображения на отдельных простых примерах реализована в рамках программной среды Mathcad 3/.

1. Вариация контура в локальной зоне вершины параболы. Контур внешности параболы задан параметрическими уравнениями:

$$x(\xi) = \alpha \cdot \xi \quad y(\xi) = \xi^2 \quad -\infty \leq \xi \leq \infty \quad (1)$$

Вводим комплексную переменную $\zeta(\xi, \eta) := \xi + i\eta$ и некоторые параметры (постоянные) отображающих функций:

$$i := \sqrt{-1} \quad \alpha := 0.12 \quad \alpha 1 := 0.5 \quad \beta 1 := 0 \quad a0 := 0 \quad \zeta(\xi, \eta) := \xi + i\eta \quad z = (x(\zeta)) + i \cdot y(\zeta)$$

Следуя /1, 2/, запишем общий вид отображающей функции

$$z(\xi, \eta) := i \cdot \zeta(\xi, \eta)^2 + \alpha \cdot \zeta(\xi, \eta) + a0 + \frac{\alpha 1 + i \cdot \beta 1}{\zeta(\xi, \eta) - i} \quad (2)$$

Функция (2) при $\eta=0$ является параметрическими уравнениями некоторых кривых, вид которых обладают следующими чертами: при отсутствии дробного слагаемого превращается в параболу (1); при стремлении переменной ζ на бесконечность дробный слагаемый стремится к нулю; при конечных значениях $\alpha 1$ и $\beta 1$ контурные кривые от параболы отличаются только вблизи начала координат $\zeta=0$, т.е. в зоне вершины параболы (1). Рассмотрим примеры вариаций параметров в (2). При $\alpha=0,05$ и $0,12$ форма контурных линий приведена на рис. 1. При $\beta 1=0,15$ и $-0,15$, $\alpha=0,05$ отображенные области изображены на рис. 2. Текст программы расчета весьма привычен и идентичен записям в алгебре. Как вариант расчета контурча обозначен просто как $x1, y1; x2, y2$ и т.д., как изображено на координатных осях (рис. 1 и рис. 2).

$$\begin{aligned} x1(\xi) &:= \operatorname{Re}(z(\xi, 0)) & y1(\xi) &:= \operatorname{Im}(z(\xi, 0)) & \xi &:= -9, -8.9..9 \\ \alpha &:= 0.05 & z2(\xi, \eta) &:= i \cdot \zeta(\xi, \eta)^2 + \alpha \cdot \zeta(\xi, \eta) + a0 + \frac{\alpha 1 + i \cdot \beta 1}{\zeta(\xi, \eta) - i} \\ x2(\xi) &:= \operatorname{Re}(z2(\xi, 0)) & y2(\xi) &:= \operatorname{Im}(z2(\xi, 0)) \end{aligned}$$

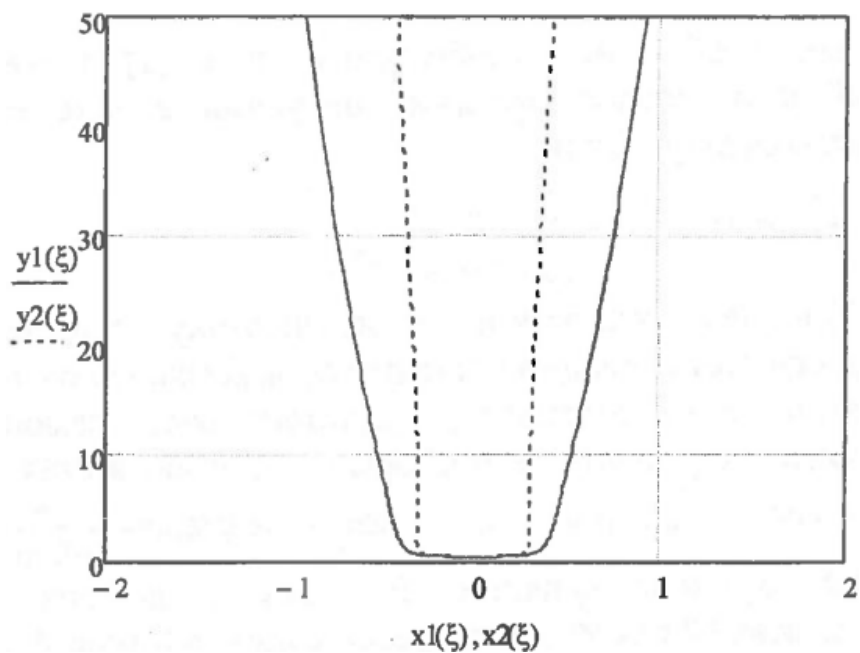


Рис. 1. Контуры линий узких речных каньонов

$$\beta_1 := 0.1; \quad \alpha_1 = 0.5 \quad z_3(\xi, \eta) := i \cdot \zeta(\xi, \eta)^2 + \alpha \cdot \zeta(\xi, \eta) + a_0 + \frac{\alpha_1 + i \cdot \beta_1}{\zeta(\xi, \eta) - i}$$

$$\beta_1 := -0.1; \quad z_4(\xi, \eta) := i \cdot \zeta(\xi, \eta)^2 + \alpha \cdot \zeta(\xi, \eta) + a_0 + \frac{\alpha_1 + i \cdot \beta_1}{\zeta(\xi, \eta) - i}$$

$$x_3(\xi) := \operatorname{Re}(z_3(\xi, 0)) \quad x_4(\xi) := \operatorname{Re}(z_4(\xi, 0))$$

$$y_3(\xi) := \operatorname{Im}(z_3(\xi, 0)) \quad y_4(\xi) := \operatorname{Im}(z_4(\xi, 0))$$

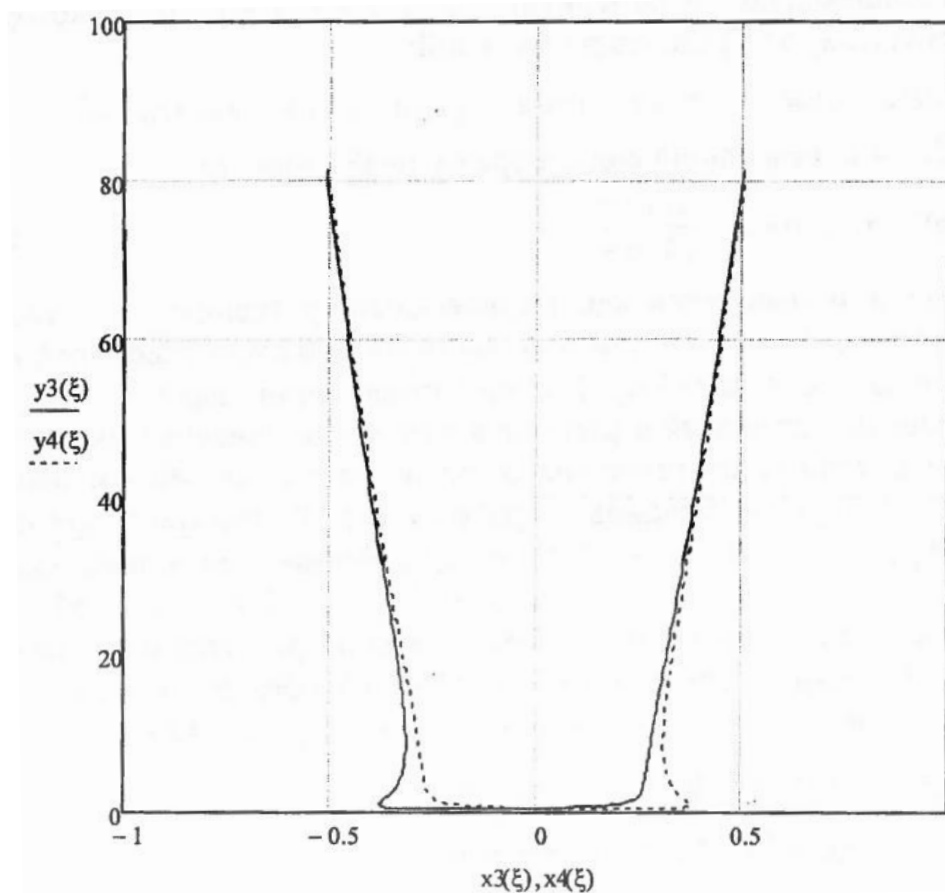


Рис. 2. Речные каньоны с несимметричными основаниями

Естественным обобщением отображений типа (1) является вариация контура областей с параболообразными контурами в зоне ее вершины с помощью отображающей функции:

$$Z(\xi, \eta) := i \cdot \zeta(\xi, \eta)^2 + \alpha \cdot \zeta(\xi, \eta) + a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k + i \cdot \beta_k}{(\zeta(\xi, \eta) - i)^k} . \quad (3)$$

Функция (3) на бесконечности имеет асимптотику — кривая парабола (1), в зоне вершины допускает вариации постоянных α_k, β_k так, чтобы не нарушались требования непрерывности, гладкости, отсутствия точек самопересечения и другие требования, предъявляемые к конформности отображения.

$$\alpha_k := 50 \quad h := 100 \quad \zeta_1(\xi, \eta) := \xi + i \cdot \eta \quad z_1(\xi, \eta) := \alpha \cdot \zeta_1(\xi, \eta) + \frac{h}{\zeta_1(\xi, \eta) - i} \quad (4)$$

Нахождение обратной функции типа $\zeta = s \cdot \Omega(z)$ до сих пор остается нерешенным, хотя всякий раз констатируется существование подобной связи. Программная среда MATCADa /3/ допускает отыскание такой связи, по крайней мере, для случая, когда обратная связь отыскивается из уравнения второй степени — внешности эллипса, параболы и отображений типа (1). Например, из (1) следует уравнение второй степени относительно переменной ζ в виде:

$$\alpha \cdot \zeta^2 - (i \cdot \alpha + z) \cdot \zeta + (h + i \cdot z) = 0$$

Первый случай, когда необходимо знать обратно отображающие функции, возникает при исследовании численными методами моделирования, например, методом конечных разностей, методом конечных элементов или методом граничных элементов. При этом расчетная схема отображает исследуемый объект, который является частью массива, отделенной от окружающей горной среды. При этом на контуре выделенной от массива части граничные условия задаются приближенно в рамках субъективных различных гипотез. Например, расчетная схема откосов и основания карьера, из-за разномасштабности размеров окружающего массива земной коры и карьера, будет отделена с двух боковых сторон и ниже от уровня основания карьера в горизонтальном направлении. Другими словами, кроме дневной поверхности карьера задаваемые граничные условия на трех перечисленных контурах, заранее неизвестные, задаются только гипотетически.

$$\zeta_a := -1 \quad \zeta_w := \alpha \cdot \zeta + \frac{h}{\zeta - i} \quad z = -100 + 50i$$

$$k := 0, 1, \dots, 10$$

$$z1(k) := -100 + 50i - 10 \cdot k \cdot i \quad d(k) := (z1(k) + i \cdot \alpha)^2 - 4 \cdot \alpha \cdot (h + i \cdot z1(k))$$

$$rd(k) := \text{Re}(d(k)) \quad r(k) := |d(k)| \quad md(k) := \text{Im}(d(k)) \quad R(k) := \sqrt{r(k)}$$

$$\phi_c(k) := \frac{rd(k)}{r(k)} \quad \phi_s(k) := \frac{md(k)}{r(k)}$$

$$\phi0(k) := \begin{cases} \phi01 \leftarrow \arccos(\phi_c(k)) + 2 \cdot \pi & \text{if } (\phi_c(k) > 0 \wedge \phi_s(k) > 0) \\ \phi01 \leftarrow -\arcsin(\phi_s(k)) - \pi & \text{if } (\phi_s(k) = 0 \wedge \phi_c(k) = -1) \\ \phi01 \leftarrow \arcsin(\phi_s(k)) & \text{if } (\phi_s(k) < 0 \wedge \phi_c(k) > 0) \\ \phi01 \leftarrow -\arccos(\phi_c(k)) & \text{if } (\phi_s(k) < 0 \wedge \phi_c(k) < 0) \\ \phi01 \leftarrow 2 \cdot \pi + \arccos(\phi_c(k)) & \text{if } (\phi_s(k) > 0 \wedge \phi_c(k) < 0) \\ \phi01 \end{cases}$$

$$\phi s1(k) := \cos\left(\frac{\phi0(k)}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\phi0(k)}{2}\right) \quad fz_{k,0} := z1(k)$$

$$\zeta\zeta(k) := \frac{[(z1(k) + i \cdot \alpha) + R(k) \cdot \phi s1(k)]}{2 \cdot \alpha} \quad fz_{k,1} := \zeta\zeta(k)$$

$$z2(k) := \alpha \cdot \zeta\zeta(k) + \frac{h}{\zeta\zeta(k) - i} \quad fz_{k,2} := z2(k)$$

	0	1	2
0	-100+50i	-1	-100+50i
1	-100+40i	-1.099-0.11i	-100+40i
2	-100+30i	-1.193-0.238i	-100+30i
3	-100+20i	-1.278-0.38i	-100+20i
4	-100+10i	-1.353-0.533i	-100+10i
5	-100	-1.419-0.694i	-100
6	-100-10i	-1.476-0.86i	-100-10i
7	-100-20i	-1.527-1.029i	-100-20i
8	-100-30i	-1.571-1.202i	-100-30i
9	-100-40i	-1.609-1.377i	-100-40i
10	-100-50i	-1.644-1.554i	-100-50i

fz =

Как видно, отображение $z1(k)$ на $\zeta\zeta(k)$ и его обратное отображение $z2(k)$ соответствуют взаимно однозначно.

На практике отображение внешности параболы на полуплоскость задается функцией типа /1, 2/.

$$\alpha := 0.01 \quad \gamma := 1. \quad i := \sqrt{-1}$$

$$\zeta1(\xi, \eta) := \xi + i \cdot \eta \quad z1(\xi, \eta) := \alpha \cdot \zeta1(\xi, \eta) + i \cdot \gamma \cdot \zeta1(\xi, \eta)^2,$$

где α и γ – варьируемые постоянные.

$$\zeta^2 + \frac{\alpha}{i \cdot \gamma} \cdot \zeta - \frac{z}{(i \cdot \gamma)} = 0$$

$$k := 1..10 \quad \zeta(k) := -5 + k - i \cdot 2 \quad z1(k) := \alpha \cdot \zeta(k) + i \cdot \gamma \cdot \zeta(k)^2$$

$$\zeta1(k) := \frac{\alpha}{i \cdot \gamma} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\alpha}{i \cdot \gamma}\right)^2 + 4 \cdot \frac{z1(k)}{(i \cdot \gamma)}} \quad \zeta2(k) := \frac{\alpha}{i \cdot \gamma} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\alpha}{i \cdot \gamma}\right)^2 + 4 \cdot \frac{z1(k)}{(i \cdot \gamma)}}$$

$$\zeta1(k) := \begin{cases} \zeta2 \leftarrow \zeta2(k) & \text{if } (\text{Re}(z1(k)) \leq 0) \\ \zeta \leftarrow \zeta1(k) & \text{if } (\text{Re}(z1(k)) > 0) \end{cases}$$

$$\zeta(k) =$$

	0
0	-4-2i
1	-3-2i
2	-2-2i
3	-1-2i
4	-2i
5	1-2i
6	2-2i
7	3-2i
8	4-2i
9	5-2i

$$z1(k) =$$

	0
0	-16.04+11.98i
1	-12.03+4.98i
2	-8.02-0.02i
3	-4.01-3.02i
4	-4.02i
5	4.01-3.02i
6	8.02-0.02i
7	12.03+4.98i
8	16.04+11.98i
9	20.05+20.98i

$$\zeta1(k) =$$

	0
0	-4-2i
1	-3-2i
2	-2-2i
3	-1-2i
4	-2i
5	1-2i
6	2-2i
7	3-2i
8	4-2i
9	5-2i

На практике отображение внешности эллипса на внешность единичного круга задается функцией типа /1, 2/.

$$m := 0.2 \quad \gamma := 1. \quad i := \sqrt{-1} \quad \rho := 10 \quad \theta := \pi$$

$$\zeta(\rho, \theta) := \rho \cdot e^{i \cdot \theta} \quad z(\xi, \eta) := \gamma \cdot \left(\zeta(\rho, \theta) + \frac{m}{\zeta(\rho, \theta)} \right) \quad (5)$$

$$z(-10, -1) = -1.2$$

где m и γ – варьируемые постоянные.

$$\zeta^2 - \frac{z}{\gamma} \cdot \zeta + m = 0 \quad (6)$$

$$\zeta_1 := \frac{\frac{z}{\gamma}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 + 4 \cdot m}$$

$$\zeta_2 := \frac{\frac{z}{\gamma}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 + 4 \cdot m}$$

$$k := 1..10$$

$$\theta := \frac{7 \cdot \pi}{4}$$

$$\zeta(k) := k \cdot e^{i \cdot \theta}$$

$$z_1(k) := \gamma \cdot \zeta(k) + \frac{m \cdot \gamma}{\zeta(k)}$$

$$\zeta_1(k) := \frac{\frac{z_1(k)}{\gamma}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{z_1(k)}{\gamma}\right)^2 - 4 \cdot m}$$

$$\zeta_2(k) := \frac{\frac{z_1(k)}{\gamma}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{z_1(k)}{\gamma}\right)^2 - 4 \cdot m}$$

$$\zeta_1(k) := \begin{cases} \zeta_2 \leftarrow \zeta_2(k) & \text{if } (\operatorname{Re}(z_1(k)) \leq 0) \\ \zeta \leftarrow \zeta_1(k) & \text{if } (\operatorname{Re}(z_1(k)) > 0) \end{cases}$$

$$\zeta(k) =$$

	0
0	0.707-0.707i
1	1.414-1.414i
2	2.121-2.121i
3	2.828-2.828i
4	3.536-3.536i
5	4.243-4.243i
6	4.95-4.95i
7	5.657-5.657i
8	6.364-6.364i
9	7.071-7.071i

$$z_1(k) =$$

	0
0	0.849-0.566i
1	1.485-1.344i
2	2.168-2.074i
3	2.864-2.793i
4	3.564-3.507i
5	4.266-4.219i
6	4.97-4.93i
7	5.675-5.639i
8	6.38-6.348i
9	7.085-7.057i

$$\zeta_1(k) =$$

	0
0	0.707-0.707i
1	1.414-1.414i
2	2.121-2.121i
3	2.828-2.828i
4	3.536-3.536i
5	4.243-4.243i
6	4.95-4.95i
7	5.657-5.657i
8	6.364-6.364i
9	7.071-7.071i

Список литературы

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Жумабаев Б. Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом. – Фрунзе: Илим, 1988. – 190 с.
3. Кирьянов Д. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.