

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

В статье показывается применение возможностей пакета Ms Excel при решении задач линейной алгебры. Студенты приобретают навыки решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и выполнений действий над матрицами средствами пакета.

Пусть задана СЛАУ следующего вида:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Эту систему можно представить в матричном виде: $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

где $\mathbf{A}$ - матрица коэффициентов $\mathbf{X}$ - вектор неизвестных $\mathbf{b}$ - вектор правых частей системы уравнений.

При выполнении лабораторной работы систему линейных алгебраических уравнений необходимо будет решать методом обратной матрицы.

Система линейных алгебраических уравнений в матричном виде имеет следующую форму $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$. Таким образом, вектор неизвестных вычисляется по формуле $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Обратите внимание на особенность работы с матричными формулами: необходимо предварительно выделять область, в которой будет храниться результат, а после получения результата преобразовывать его к матричному виду, нажав клавиши **F2** и **Ctrl+Shift+Enter**.

Теперь рассмотрим решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы на следующем примере.

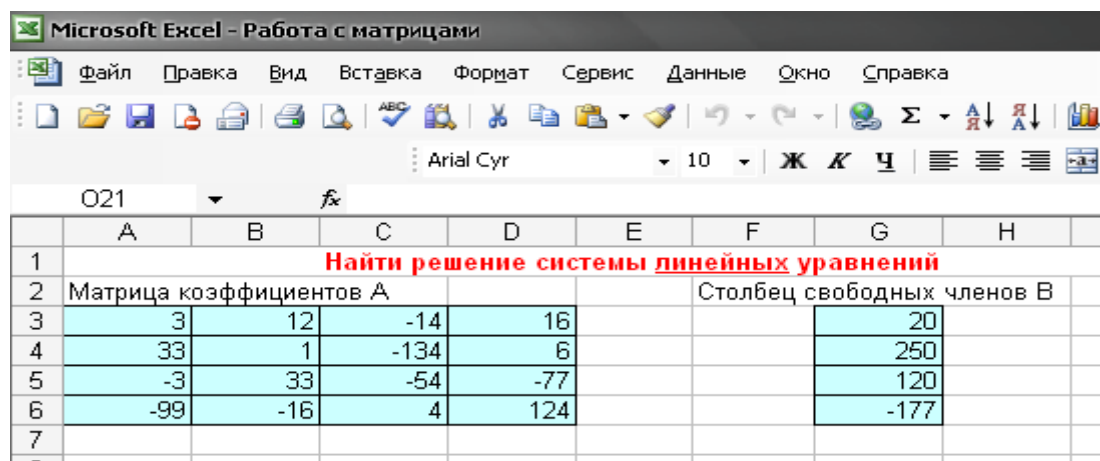
ПРИМЕР. Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 - 14x_3 + 16x_4 = 20 \\ 33x_1 + x_2 - 134x_3 + 6x_4 = 250 \\ -3x_1 + 33x_2 - 54x_3 - 77x_4 = 120 \\ -99x_1 - 16x_2 + 4x_3 - 124x_4 = -177 \end{cases}$$

В этом случае матрица коэффициентов **A** и вектор свободных коэффициентов **b** имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -14 & 16 \\ 33 & 1 & -134 & 6 \\ -3 & 33 & -54 & -77 \\ -99 & -16 & 4 & -124 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 250 \\ 120 \\ -177 \end{pmatrix}$$

Введём матрицу **A** и вектор **b** в рабочий лист MS Excel (рис. 1). В нашем случае матрица **A** находится в ячейках **A3:D6**, а вектор **b** в диапазоне **G3:G6**.



Microsoft Excel - Работа с матрицами

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Arial Cyr 10 Ж К Ч

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Найти решение системы линейных уравнений							
2	Матрица коэффициентов A				Столбец свободных членов B			
3	3	12	-14	16			20	
4	33	1	-134	6			250	
5	-3	33	-54	-77			120	
6	-99	-16	4	124			-177	
7								

Рис. 1.

Система линейных алгебраических уравнений имеет решение в том и только в том случае, если определитель коэффициентов матрицы **A** не равен нулю. Вычислим определитель с помощью встроенной функции **МОПРЕД** (рис. 2.).

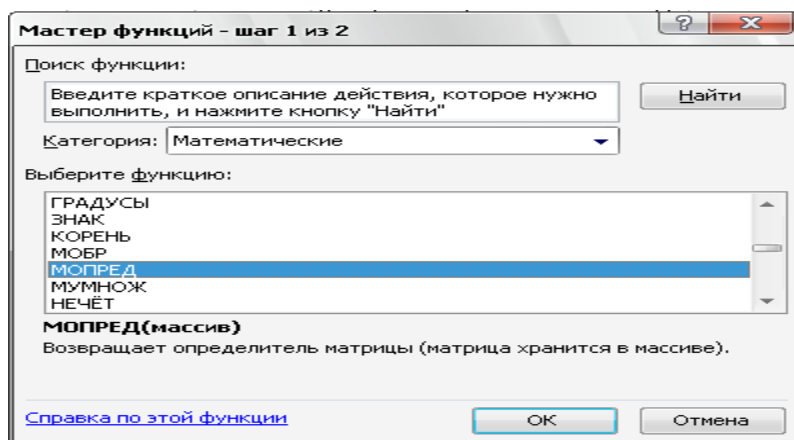


Рис. 2.

В открывшемся окне укажем диапазон матрицы коэффициентов А **A3:D6** и нажмем кнопку **ОК**.

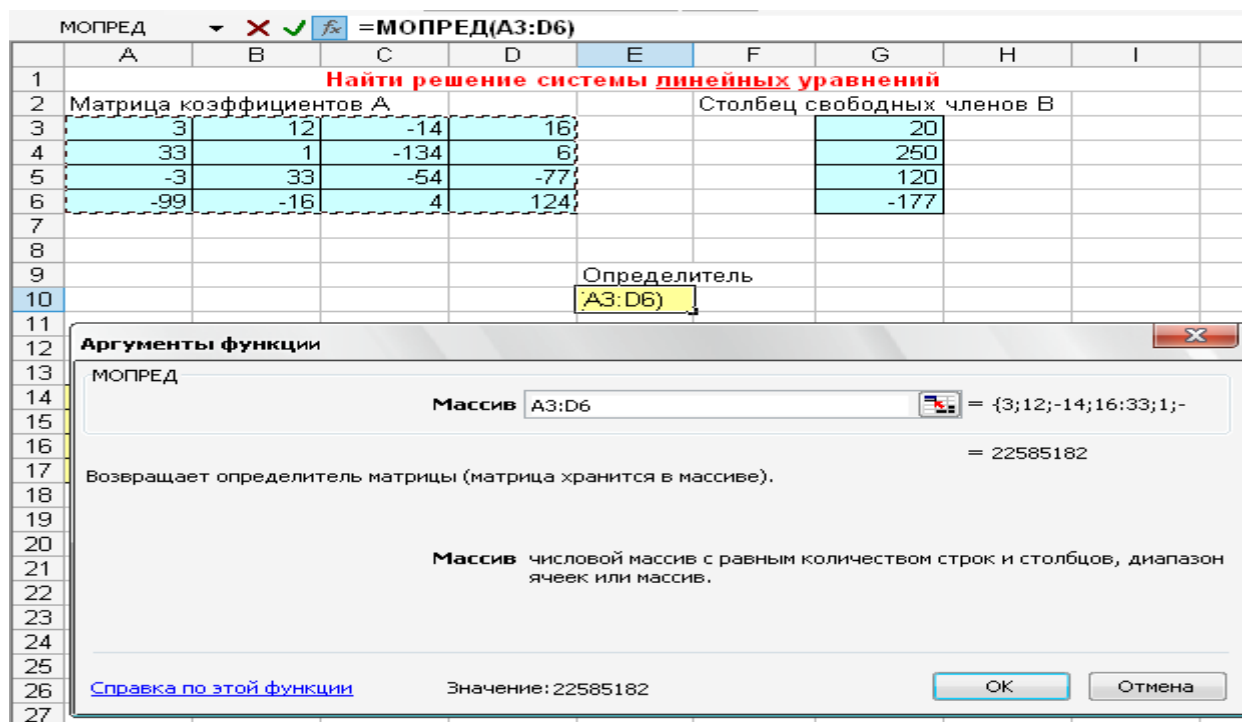


Рис. 3.

Определитель матрицы А равен 22585182, т.е. система уравнений имеет решение.

Для решения системы методом обратной матрицы необходимо вычислить матрицу, обратную к А. Для этого выделим ячейки для хранения обратной матрицы (это нужно сделать обязательно!!!); пусть в нашем случае это будут ячейки **A14:D17**.

Теперь обратимся к мастеру функций, и в категории Математические выберем функцию **МОБР**, предназначенную для вычисления обратной матрицы, щелкнув по кнопке **ОК**, перейдем ко второму шагу мастера функций (рис. 4.). В диалоговом окне, появляющемся на втором шаге мастера функций, необходимо заполнить поле ввода Массив. Это поле должно содержать диапазон ячеек, в котором хранится исходная матрица - в нашем случае **A3:D6**. Данные в поле ввода Массив можно ввести, используя клавиатуру или выделив их на рабочем листе, удерживая левую кнопку мыши (рис. 5.).

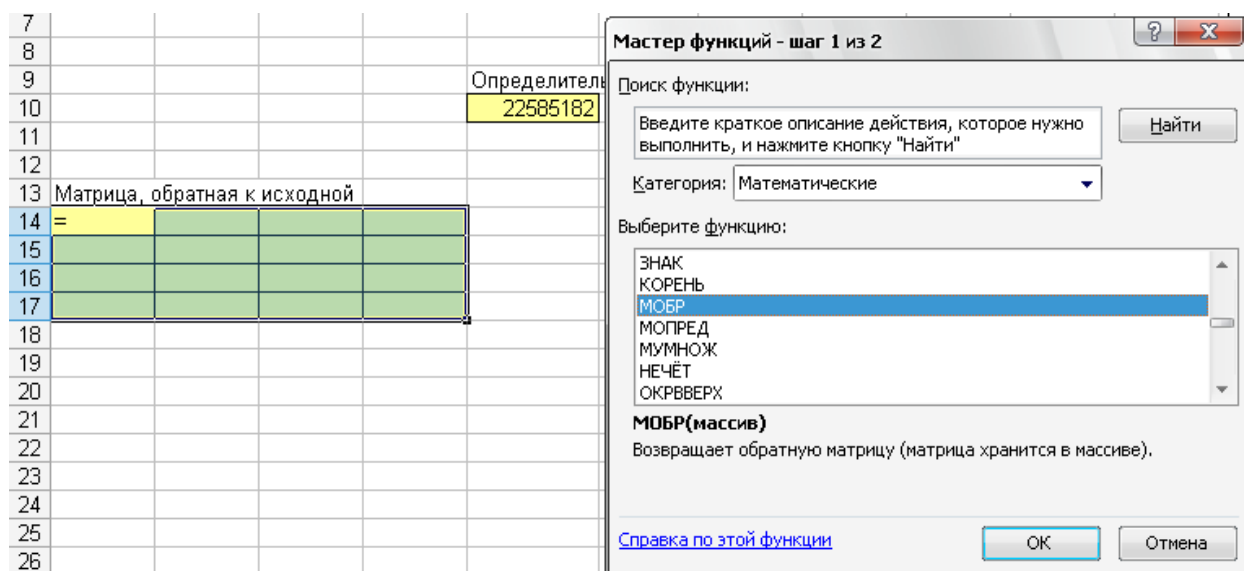


Рис. 4.

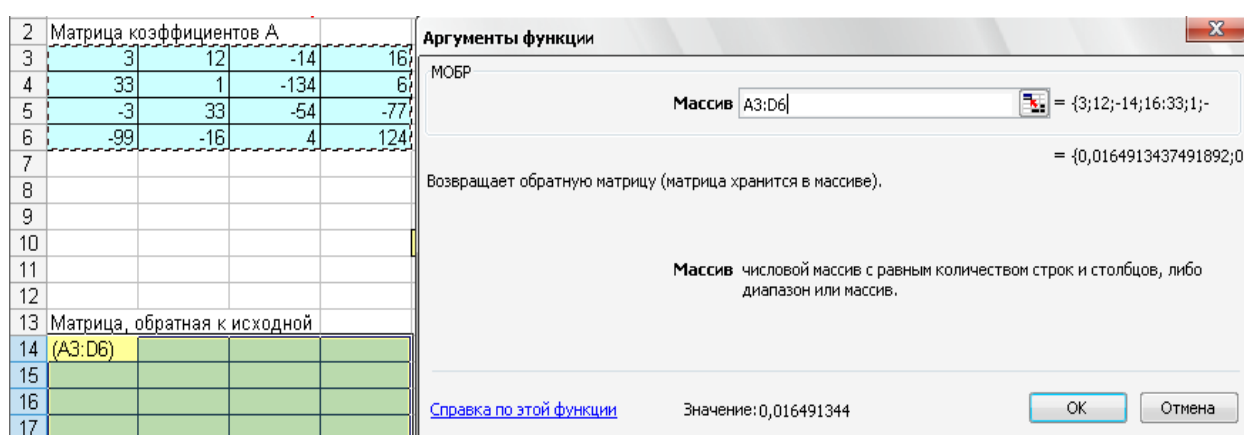


Рис. 5.

Если поле Массив заполнено, можно нажать кнопку **ОК**. В первой ячейке, выделенного под обратную матрицу диапазона, появится некое число. Для того чтобы получить всю обратную матрицу, необходимо нажать клавишу **F2** для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши **Ctrl+Shift+Enter**. В нашем случае рабочая книга MS Excel примет вид изображенный на рис. 6.

	B15		fx {=МОБР(A3:D6)}		
	A	B	C	D	
13	Матрица, обратная к исходной				
14	0,016491	0,00214	-0,01022	-0,00858	
15	0,058192	-0,0096	0,00861	-0,0017	
16	0,005414	-0,00698	-0,00276	-0,00208	
17	0,020501	0,000695	-0,00696	0,001064	

Рис. 6.

Теперь необходимо умножить полученную обратную матрицу на вектор **b**, выделим ячейки для хранения результирующего вектора, например **G14:G17**. Обратимся к мастеру функций, и в категории **Математические** выберем функцию **МУМНОЖ**, которая предназначена для умножения матриц. Напомним, что умножение матриц происходит по правилу строка на столбец и матрицу **A** можно умножить на матрицу **B** только в том случае, если количество столбцов матрицы **A** равно количеству строк матрицы **B**. Кроме того, при умножении матриц важен порядок сомножителей, т.е. **AB** ≠ **BA**. Перейдём ко второму шагу мастера функций. Появившееся диалоговое окно содержит два поля ввода **Массив1** и **Массив2**. В поле **Массив1** необходимо ввести диапазон ячеек, в котором содержится первая из перемножаемых матриц, в нашем случае **A14:D17** (обратная матрица), а в поле **Массив2** ячейки, содержащие вторую матрицу, в нашем случае **G3:G6** (вектор **b**). (рис. 7.).

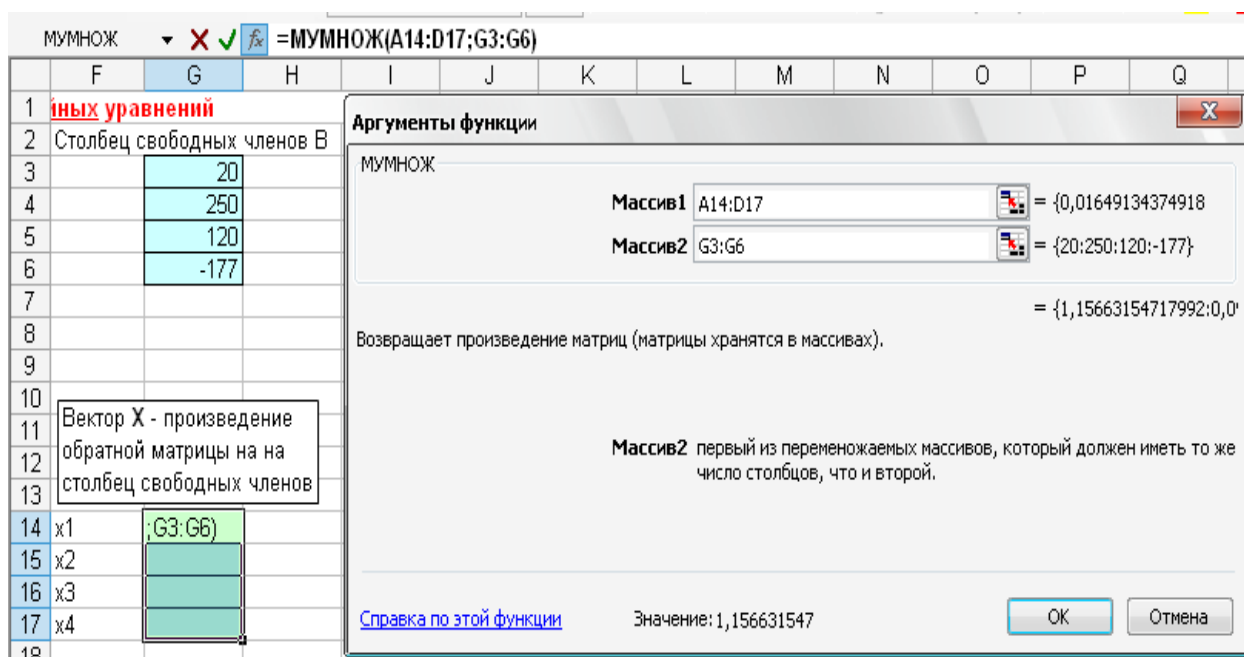


Рис. 7.

Для того чтобы получить весь вектор, необходимо нажать одновременно клавиши **Ctrl+Shift+Enter**. В нашем случае результаты вычислений (вектор **X**), находится в ячейках **G14:G17**.

Для того чтобы проверить, правильно ли решена система уравнений, необходимо умножить матрицу **A** на вектор **X** и получить в результате вектор **b**. Умножение матрицы **A** на вектор **X** осуществляется при помощи функции **МУМНОЖ(A3:D6;G14:G17)**, так как было описано выше.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Найти решение системы линейных уравнений								
2	Матрица коэффициентов A					Столбец свободных членов B		Проверка	
3	3	12	-14	16			20		20
4	33	1	-134	6			250		250
5	-3	33	-54	-77			120		120
6	-99	-16	4	124			-177		-177
7									
8									
9					Определитель				
10					22585182				
11					Вектор X - произведение обратной матрицы на столбец свободных членов				
12									
13	Матрица, обратная к исходной								
14	0,016491	0,00214	-0,01022	-0,00858	x1		1,156632		
15	0,058192	-0,0096	0,00861	-0,0017	x2		0,097476		
16	0,005414	-0,00698	-0,00276	-0,00208	x3		-1,59979		
17	0,020501	0,000695	-0,00696	0,001064	x4		-0,4398		

Рис. 8.

В результате проведенных вычислений рабочий лист примет вид изображенный на рис. 8.

Для лабораторной работы предлагаются несколько вариантов примеров.

Вариант 1.

Вариант 2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

Вариант 3.

Вариант 4.

$$\begin{cases} 5x + 8y - z = -7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

Применение компьютерных технологий приводит к интенсификации всех уровней учебно-воспитательного процесса, к повышению эффективности и качества процесса обучения, к активизации познавательной деятельности студентов.

Список литературы

1. Роберт И.В. Современные информационные технологии в образовании. - М.:Школа-Пресс, 1994.
2. Гершунский Б.С. Компьютеризация в сфере обучения: проблемы и перспективы. - М.:Педагогика, 1987.

3. Кибзун А.И., Наумов А.В., Горяинова Е.Р. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами / Под ред. Кибзуна А.И. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007,(3-е издание) 234 стр .

4. Высоцкий И.Р. Компьютеризация в образовании// Информатика и образование. 2000, № 1.