УДК : 517,977.5,532.546+518.5

БАШКАРУУ ТЕОРИЯСЫНДА СЫЗЫКТУУ АЛГЕБРАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИН КОЛДОНУУ

Байболотов Б.А., Маданбекова Э.Э., Туратбекова Э.Т
К.Тыныстанов ат. ЫМУ, Каракол ш.

Башкаруу маселелери математикалык каражаттардын жардамы менен чечилет. Автоматтык башкаруу системасынын математикалык моделин көрсөтүүнүн негизги формасы дифференциалдык теңдеме болуп саналат. Автоматтык башкаруунун теориясында өткөрүүчү функцияларын колдонуу кабыл алынган. Аларды чыгаруу үчүн сызыктуу алгебранын методдорун колдонобуз. Сызыктуу алгебра ар кандай тармактарда, анын ичинде башкаруу теориясында кеңири колдонулган күчтүү математикалык курал. Ал динамикалык системаларды моделдөө, анализдөө жана башкаруу маселелерин чечүү үчүн методдордун комплексин камсыз кылат. Макалада башкаруу маселелерин чечүү үчүн сызыктуу алгебра ыкмаларын колдонуу каралды.

***Баштапкы сөздөр*:** Сызыктуу алгебралык теңдемелер системасы, матрица, өзгөрмө, коэффициент, метод, тутумдаш, бир тектүү, чыгарылыш, башкаруу, система

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Байболотов Б.А., Маданбекова Э.Э., Туратбекова Э.Т.
ИГУ им. К.Тыныстанова, г.Каракол

Задачи управления решаются с помощью математических инструментов. Основной формой представления математической модели системы автоматического регулирования является дифференциальное уравнение. Использование передаточных функций принято в теории автоматического управления. Для их вывода воспользуемся методами линейной алгебры. Линейная алгебра — мощный математический инструмент, широко используемый в различных областях, включая теорию управления. Он предоставляет набор методов моделирования, анализа и управления динамическими системами. В статье рассмотрено использование методов линейной алгебры для решения задач управления.

Ключевые слова: Система линейных алгебраических уравнений, матрица, переменная, коэффициент, метод, сопряженный, однородный, решение, управление, система.

APPLICATION OF ELEMENTS OF LINEAR ALGEBRA IN CONTROL THEORY

Baibolotov B.A., **Madanbekova E.E., Turatbekova E.T.**
ISU named after K.Tynystanov, Karakol c.

Controlt tasks are solved with the help of mathematical tools. The main form of presentation of the mathematical model of the system of automatic regulation is a differential equation. The use of transfer functions is accepted in the theory of automatic control. For their derivation, we use the methods of linear algebra. Linear algebra is a powerful mathematical tool widely used in various fields, including control theory. It provides a set of methods for modeling, analysis and control of dynamic systems. In the article, the use of linear algebra methods for solving control problems is considered.

Keywords: System of linear algebraic equations, matrix, variable, coefficient, method, conjugate, homogeneous, solution, control, system.

Киришүү. Сызыктуу алгебра системанын каалаган абалына жетүү үчүн оптималдуу киргизүүлөрдү таба турган оптималдуу башкаруу алгоритмдерин иштеп чыгуу, системанын керектүү абалын кармап туруу, киргизүүлөрдү автоматтык түрдө жөнгө салуучу кайтарым байланыш системаларын долбоорлоо үчүн пайдаланылат[2].

Сызыктуу алгебра учууну башкаруу системалары, роботторду башкаруу системалары жана температураны башкаруу системалары сыяктуу автоматтык башкаруу системаларында кеңири колдонулат.

Сызыктуу алгебранын ыкмалары сигналдарды иштетүүдө ызы-чууну чыпкалоо, сигналдардан маалыматты алуу жана маалыматтарды кысуу үчүн, экономикалык моделдерде экономикалык көрсөткүчтөрдү болжолдоо, инвестицияларды оптималдаштыруу жана экономикалык системаларды талдоо маселерин чыгаруу үчүн колдонулат.

Изилдөө методдору: Туруктуулук – бул тең салмактуулукту бузган дүүлүгү таасири аяктагандан кийин динамикалык системанын тең салмактуулук абалына кайтып келүү жөндөмдүүлүгү. Туруктуу система гана ишке жөндөмдүү. Эгерде система сызыктуу дифференциалдык теңдеме менен сүрөттөлсө, анда анын туруктуулугу дүүлүгүнүн чоңдугуна көз каранды эмес.

Сызыктуу системанын туруктуулугу дүүлүгүнүн мүнөзү менен эмес, системанын өзүнүн структурасы менен аныкталат. Ляпунов А.М. сызыктуу системалар үчүн туруктуулук шарттарын автоматтык башкаруу системасынын мүнөздөмө теңдемесин талдоонун натыйжасы катары аныктаган [1].

Ар кандай динамикалык системанын өткөрүп берүүчү функциясы төмөнкү формага келтирилиши мүмкүн:

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n},$$

мында a жана b туруктуу коэффициенттер, алар анык сандар жана системанын элементтеринин конкреттүү физикалык параметрлери аркылуу туюнтулат.

Бул туюнтуунун эң маанилүү шарты n ≥ m шарты болуп саналат, ал реалдуу динамикалык системалардын звенолорунун физикалык касиеттеринен келип чыгат. Бул туюнтмадан биз бүтүндөй системанын ачык жана жабык абалындагы дифференциалдык теңдемесин ала алабыз.

x ; y тамырлары анык же эки-экиден комплектүү тутумдаш болушу мүмкүн. Бир тектүү теңдеменин чыгарылышы x, y тамырлары жана көрсөткүчтөрдүн алдындагы коэффициенттер аркылуу туюнтулат:

$$y_{св}(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n \exp(s_n t)$$

Автоматтык башкарылуучу системанын туруктуулугун изилдөө системанын XY тамырларынын чыныгы бөлүктөрүнүн белгилерин аныктоого келтирилет. Автоматтык башкаруу теориясында XY тамырларынын белгилери жөнүндө чыгарбай эле аныктоого мүмкүндүк берүүчү эрежелер иштелип чыккан.

Мындай эрежелер туруктуулук критерийлери деп аталат, алар алгебралык жана жыштык туруктуулук критерийлерине бөлүнөт.

Алгебралык туруктуулук критерийин карайлы.

Гурвицтин алгебралык туруктуулук критерийи [3]

Гурвиц критерийинин формулировкасы:

Башкаруу системасы туруктуу болушу үчүн Гурвицтин бардык аныктагычтарынын белгилери мүнөздөөчү теңдеменин биринчи коэффициентинин белгиси менен бирдей болушу зарыл жана жетиштүү, б.а., эгер $a_0 > 0$ болсо, анда оң болушу керек [3].

Алгач,

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

мүнөздөөчү теңдемесинин коеффициенттеринен Гурвицтин башкы аныктагычын түзөбүз:

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} > 0 \qquad i = 0, \bar{n}$$

Гурвицтин башкы аныктагычындагы диагоналдык минорлорду сызып салуу менен төмөнкү тартиптеги Гурвицтин аныктагычтарын алууга болот. Гурвицтин аныктагычынын номуру, бул аныктагычты түзүү үчүн колдонулуп жаткан диагоналдагы коэффициентин номуру менен аныкталат.

1-чи жана 2-тартиптеги системалар үчүн туруктуулуктун зарыл жана жетиштүү шарты болуп мүнөздөөчү теңдеменин коэффициенттеринин оң болушу саналат. 3-чү, 4-чү жана андан жогррку тартиптеги системалар үчүн коэффициенттердин оң болушунан сырткары, кошумча барабарсыздыктардын аткарылышы талап кылынат.

Мисалы:

3- тартиптеги теңдеме үчүн (n=3) $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$;

4-тартиптеги теңдеме үчүн (n=4) $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0$.

Эгерде төмөнкү тартиптеги бардык аныктагычтар оң болсо, анда башкы аныктагыч нөлгө барабар болгондо система туруктуулуктун чегинде болот: $\Delta_n = a_n\Delta_{n-1}$

Бул барабардык эки учурда аткарылышы мүмкүн:

$a_n = 0$ – система мезгилсиз туруктуулуктун чегинде болот (мүнөздөөчү теңдеменин тамырларынын бири нөлгө барабар);

$\Delta_{n-1} = 0$ – система термелүү туруктуулугунун чегинде болот(мүнөздөөчү теңдеменин эки комплекстүү-тутумдаш тамырлары мнимый окто жайгашат).

Гурвицтин критерии туруктуулуктун чегин жана областын түзүү үчүн колдонулушу мүмкүн.

Колдонулуп жаткан системанын

$a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n = 0$

Түрдөгү мүнөздөөчү теңдемеси бар болсун дейли. Анда мезгилсиз туруктуулуктун чегин аныкташ үчүн, $a_0 = 0$ жана $a_n = 0$ деп коюу зарыл, жана аларды туруктуулук чегине туура келген параметрге карата бөлүү керек.

Туруктуулуктун термелүү чектерин аныктоо үчүн $\Delta_{n-1} = 0$ аныктагычын эсептөө керек жана андан термелүү чегин аныктоочу жана туруктуулук областынын параметрлеринин бирөөсүнүн функциясы болгон параметрди бөлүп алуу керек

Андан кийин, "штрихтөө" эрежесин колдонуп, берилген параметрлердин тегиздигинде туруктуулук областын аныктоо керек.

Маселелерде Гурвиц критерийинин негизинде системанын туруктуулугун аныктоо

Системанын мүнөздөөчү теңдемеси берилсин, туруктуулугун аныктайбыз.

1) $$4p^2 + 2p + 4 = 0,$$

Чыгаруу:

Мүнөздөөчү теңдеме 2-тартипте жана анын бардык коэффициенттери оң мааниде. Демек, изилденип жаткан система туруктуу.

2) 3-тартиптеги мүнөздөөчү теңдемеси менен берилген системаны изилдейли

$$5p^3 + 2p^2 + p + 4 = 0,$$

мында $a_0 = 5$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$.

Система туруктуу болушу үчүн мүнөздөөчү теңдемесинин бардык коэффициенттери оң маани алыш керек жана аныктагыч $\Delta_{n-1} > 0$ болушу зарыл.

Чыгаруу: Берилген 3-тартиптеги мүнөздөөчү теңдемесинин бардык коэффициенттери оң мааниге ээ, демек системанын туруктуулугун баалоо үчүн Δ_2 аныктагычын белгисин аныктоо керек.

Анализделип жаткан система үчүн Гурвицтин аныктагычын жазабыз:

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Андан Δ_2 аныктагычынбөлүп алабыз жана белгисин аныктайбыз:

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 20 = -18 < 0,$$

демек берилген система туруктуу эмес.

Гурвиц критерийи баштапкы мүнөздөөчү теңдемесинин коэффициенттерин аныктоого мүмкүндүк берет, алардын өзгөрүшү системаны туруктуу же туруксуз кылат. Мисалы, $a_1 > 20$ кылып өзгөртүп, $\Delta_2 > 0$ ду алабыз, мындан анализденип жаткан система туруктуу болуп калат. Ушундай жыйынтыкты мүнөздөөчү теңдеменин коэффициенттерин $a_0 = 1,\ a_1 > 4$ кылып өзгөртсөк дагы алабыз.

3) Система төмөндөгүдөй түрдөгү мүнөздөөчү полиномго ээ болсун дейли:

$a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = 0,$

мында $a_0 = 1, a_1 = 10, a_2 = 3, a_3 = ?\,, a_4 = 1$, болсун.

Система термелүүчү жана мезгилсиз туруктуулуктун чегинде боло тургандай a_3 коэффициентинин маанисин аныктоо керек.

Чыгаруу.

Бул системанын аныктагычын жалпы түрдө жазабыз:

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

Бул аныктагычтан курамында изделип жаткан a_3 коэффициент кирген, 3-тартиптеги Δ_3 аныктагычты бөлүп алабыз, жана Δ_3 ти нөлгө барабарлайбыз:

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Δ_3 аныктагычын эсептейбиз:

$$\Delta_3 = (-1)^2 a_1 \begin{pmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} + (-1)^3 a_3 \begin{pmatrix} a_0 & a_4 \\ 0_1 & a_3 \end{pmatrix} + (-1)^4 \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} =$$

$$= a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_3(a_0a_3 - 0 \cdot a_4) = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2a_0 = 0$$

Δ_3 кө коэффициенттердин берилген маанилерин коюп,

$10 \cdot 3a_3 - 10^2 \cdot 1 - a_3^2 \cdot 1 = 0$ ти алабыз.

Мындан $a_3^2 - 30a_3 + 100 = 0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Бул теңдемени чыгарып, $a_3 \approx 26{,}18$, $a_3 \approx 3{,}82$ ди алабыз. Бул маанилерде система термелүү туруктуулук чегинде болот.

Ушул система үчүн мезгилсиз туруктуулук чегинде боло тургандай a_3 коэффициентинин маанисин аныктайлы.

$\Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2a_0 = 0$ экени белгилүү

$a_4 = 0$ шарты аткарылганда $a_1 a_2 a_3 - a_3^2 a_0 = 0$. Коэффициенттердин маанилерин койсок $30a_3 - a_3^2 = 0$, мындан $a_3 = 30$ келип чыгат.

Натыйжада, $a_3 = 30$ маанисинде система мезгилсиз туруктуулуктун чегинде болот.

Жыйынтык:

Башкаруу маселелери математикалык каражаттардын жардамы менен чечилет. Автоматтык башкаруу системасынын математикалык моделин көрсөтүүнүн негизги формасы дифференциалдык теңдеме болуп саналат [2].

Автоматтык башкаруунун теориясында өткөрүүчү функцияларын колдонуу кабыл алынган. Аларды чыгаруу үчүн сызыктуу алгебранын методдорун колдонобуз.

Бул жерде биз башкаруу маселелерин чечүү үчүн сызыктуу алгебра ыкмаларын колдонуу каралды.

АДАБИЯТТАР

1. Желтиков О.М. Основы теории управления. Конспект лекций/ О.М. Желтиков//–Самара,СГТУ,2008.–URL: http://www.jelomak.ru/pager.htm.
2. Маданбекова Э.Э., Башкаруу системаларындагы математикалык моделдердин элементтери. [текст]/ Э.Э.Маданбекова, А.Б. Байсеркеева, А.Т. Кочорбаева//«Известия вузов Кыргызстана», №2,Бишкек, 2022 (февраль)
3. Макарова, Л. Ф. Основы теории управления: сборник контрольных заданий / Л. Ф. Макарова.// – Изд. 2-е, перераб. и доп. – СПб. : СПбГТИ(ТУ), 2017. – 64 с.