УДК 517. 977.5. 928.2

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ПОТЕРЬ В ТРАНСПОРТИРОВКЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ КАНАЛАХ

Осмонов К.Т., Болотова А.Б., Нурласова С.Н.
КГТУ им. И. Раззакова

В статье рассматривается ламинарное течение несжимаемой вязкой жидкости в открытом канале секторного поперечного сечения. На стенках канала ставятся условия: прилипания; на свободной поверхности – нулевое и ненулевые касательные напряжения. Для решения задачи используется численный метод дробных шагов. Задача приводится на изопериметрической форме и решается для определения поля скоростей, расхода жидкости, оптимального параметра формы сечения канала при постоянной длине смоченного периметра. Был составлен общий алгоритм решения задачи, и соответствующие программы реализации. Результаты были оформлены в виде таблиц, графических изображений результатов. Сделаны соответствующие выводы, и проведен сравнительный анализ по относительным изменениям параметров решения.

***Ключевые слова*:** канал секторного сечения, ненулевые касательные напряжения, изопериметрическая задача, оптимальный параметр, метод дробных шагов, поля скоростей, расход жидкости, общий алгоритм решения задачи, графические изображения результатов.

АЧЫК КАНАЛДАРДАГЫ СУЮКТУКТАРДЫ ТРАНСПОРТТООДОГУ ЖОГОТУУЛАРДЫ МИНИМАЛДАШТЫРУУ ҮЧҮН МАСЕЛЕНИ ИЗИЛДӨӨНҮН ИНФОРМАЦИЯЛЫК ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫ

Осмонов К.Т., Болотова А.Б., Нурласова С.Н.
И. Раззаков ат. КМТУ

Макалада сектордук туурасынан кесилишиндеги ачык каналындагы кысылбаган илээшкек суюктуктун ламинардык агымы каралат. Каналдардын: дубалдарында жабышуу; эркин бетинде – нөлдүк жана нөлдүк эмес жаныма чыңалууларынын шарттары коюлат. Маселени чечүү үчүн бөлчөк кадамдар сандык ыкмасы колдонулат. Маселе изопериметрлик түргө келтирилет жана ылдамдык талаасын, суюктуктун

зарпталышын, каналдын нымдалган периметринин узундугу туракту болгондо канал кесилишинин формасынын оптималдуу параметрин аныктоо үчүн чечилет. Маселени чечүүнүн жалпы алгоритми жана аны ишке ашыруунун тиешелүү программалары түзүлдү. Жыйынтыктар таблицалар, натыйжалардын графиктик сүрөттөлүштөрү түрүндө тарызделди. Тиешелүү тыянактар чыгарылып, чечимдин параметрлеринин салыштырмалуу өзгөрүүлөрү боюнча салыштырмалуу анализ жүргүзүлдү.

***Баштапкы сөздөр*:** сектордук кесилиштеги канал, нөлдүк эмес жаныма чыңалуусу, изопериметрлик маселе, оптималдуу параметр, бөлчөктүү кадамдар ыкмасы, ылдамдык талаалары, суюктук зарпталышы, маселени чечүүнүн жалпы алгоритми, натыйжалардын графиктик сүрөттөлүшү.

INFORMATION TECHNOLOGIES: RESEARCH PROBLEMS FOR MINIMIZING LOSSES IN FLUID TRANSPORTATION IN OPEN CHANNELS

Osmonov K.T., Bolotova A.B., Nurlasova S.N.
KSTU n.a. I. Razzakov

The article examines the laminar flow of an incompressible viscous fluid in an open channel with a sectoral cross-section. The following conditions are imposed on the channel walls: the no-slip condition; on the free surface — zero and non-zero shear stresses. To solve the problem, a numerical method of fractional steps is used. The problem is formulated in isoperimetric form and is solved to determine the velocity field, fluid flow rate, and the optimal parameter for the cross-sectional shape of the channel, given a constant wetted perimeter length. A general algorithm for solving the problem was developed, along with the corresponding implementation programs. The results were presented in the form of tables and graphical representations of the results. The relevant conclusions were drawn, and a comparative analysis was carried out based on the relative changes in the solution parameters.

***Keywords**:* sector-shaped channel, non-zero shear stresses, isoperimetric problem, optimal parameter, fractional step method, velocity fields, fluid flow rates, general algorithm for solving the problem, graphical representations of the results.

Широкий размах строительства оросительных систем, использования рек, промышленного и сельскохозяйственного водоснабжения требует глубокой разработки ряда научных проблем в гидравлике и гидродинамике открытых каналов и русел. Одним из важных вопросов является движение воды и формирование русла в потоке, имеющим непрямолинейное очертание в плане.

Облицовка каналов устраивается в целях снижения фильтрационных потерь, предохранения их от размыва и оползания откосов, снижения шероховатости поверхности их стенок, а также предотвращения зарастания канала водной растительностью, для защиты канала от поступления в него загрязненных почвенных вод [4].

В данной работе изучается задачи предотвращения потери вод при транспортировке и пути его преодоления, что является **актуальной**.

Для течения вязкой несжимаемой жидкости в прямом или закругленном бесконечном канале существенна безразмерная величина – число Рейнольдса $Re = \frac{\chi \cdot W}{\nu}$, где W - характерный масштаб скорости, χ - длина смоченного периметра, берем за характерную длину, v - кинематический коэффициент вязкости. В зависимости от соотношения сил вязкости и сил инерции поток может находиться в ламинарном, переходном или турбулентном режиме.

В настоящей работе рассмотрено ламинарное течение в каналах секторного поперечного сечения, где число Рейнольдса изменяется в умеренных значениях. Применением полярной системы координат [3] математическая модель движения описывается уравнением Пуассона в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} = -\frac{g \sin\theta}{\nu}. \qquad (1)$$

Здесь r – радиус полярной оси $0 \le r \le R$, ϕ - полярный угол изменяемого в пределе $0 \le \phi \le \phi_N$, g – ускорение силы тяжести, θ - угол наклона оси течения канала к горизонту, $w = w(r, \phi)$ - скорость жидкости по продольному направлению канала относительно полярной системы координат.

Граничные условия отличаются формами задания по направлениям r и ϕ: в случае секторного сечения

$$W\big|_{r=0} = 0, \qquad W\big|_{r=1} = 0, \qquad (2)$$

$$W\big|_{\varphi=0} = 0, \qquad \frac{\phi_N + 1}{\chi} \cdot \frac{\partial W}{\partial \phi}\Big|_{\phi=\phi_N} = 0{,}052 W_{sh}, \qquad (3)$$

а в случае полукругового сечения рассматривается часть круга и выполняемые условия имеют следующие формы записи [1] для (3а)

$$\frac{\partial W}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \qquad W|_{r=1} = 0, \qquad (2а)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0} = 0{,}052\frac{\chi}{\pi} W_{sh}; \qquad \frac{\partial W}{\partial \phi}\Big|_{\phi=\pi} = 0{,}052\frac{\chi}{\pi} W_{sh}. \qquad (3а)$$

Переходим сначала к безразмерным величинам $\bar{r}$, $\bar{w}$, связанные с характерной длиной χ и другими характерными параметрами течения, параметром формы полярным углом ϕ_N- угла между свободной поверхностью и радиально расположенной донной стенкой, или при $0 \leq \phi_N \leq \pi$ боковой радиальной стенкой поперечного сечения канала. Связь между размерными и безразмерными величинами можно представить формулами:

$$w = W\bar{w} = \frac{\chi^2 g \cdot \sin\theta}{v}\bar{w}, \quad \bar{w} = \frac{v}{\chi^2 g \cdot \sin\theta} w, \qquad W = \frac{\chi^2 g \cdot \sin\theta}{v}. \qquad (4)$$

$$\chi = R + R\phi_N = (1+\phi_N)R; \qquad 0 < \phi \leq \phi_N; \qquad 0 < \phi_N \leq \pi \ , \qquad (4а)$$

$$R = \frac{\chi}{1+\varphi_N}\bar{R}; \qquad \bar{r} = \frac{\chi}{1+\varphi_N}\bar{r}, \qquad 0 \leq \bar{r} \leq \bar{R}. \qquad (4б)$$

С учетом выше указанных равенств уравнение (1) примет вид

$$W\frac{1}{\bar{R}^2}\left[\frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\bar{r} \cdot \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{r}}\right) + \frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \phi^2}\right] = -\frac{\chi^2 g \cdot \sin\theta}{4 \cdot v}. \qquad (1а)$$

Выбрасывая "черточки" в безразмерных величинах, сокращая на размерные величины, добавляя производную по времени $\frac{\partial W}{\partial t}$, из него получим в безразмерном виде уравнение параболического типа, чтобы применить схему переменных направлений численного метода дробных шагов [2]:

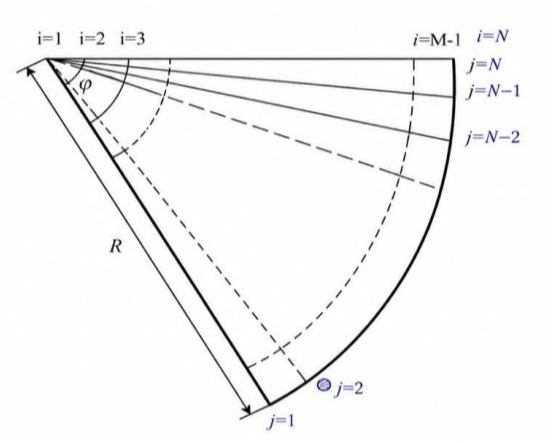
$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}\right] + 1. \qquad (6)$$

Граничные условия по направлениям r и ϕ: для секторного сечения

$$W\big|_{r=0} = 0, \qquad W\big|_{r=1} = 0, \qquad (7а)$$

$$W\big|_{\varphi=0} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \phi}\Big|_{\phi=\phi_N} = \frac{\chi}{1+\phi_N} 0{,}052 W_{sh}. \qquad (7б)$$

Перейдем к решениям краевых задач используя сеточную область.



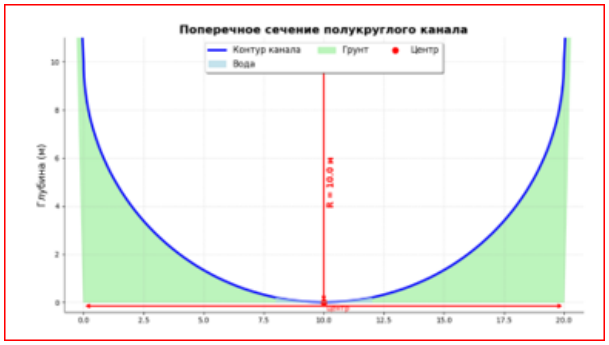


Рис. 1. Деления сектора с r_i и ϕ_j канала. Полукруговое сечение.

В левом рисунке 1 индексы *i* = 1, ... , M, *j* = 1, ... , N соответствуют изменениям узловых значений координатных величин по r_i и ϕ_j. В сеточных делениях принято, что M - число узлов сетки по r, N - число узлов по ϕ.

В частности, при изменении угла ϕ в пределе $-0{,}5 \cdot \pi \le \phi_n \le 0{,}5 \cdot \pi$ или $0 \le \phi_n \le \pi$ соответствует полукругу указанной в правом рисунке 1.

Для внутренней области при *i* = 2, ..., M-1, *j* = 2, ..., N-1 обозначим [2]:

$$\Lambda_{\phi\phi} W_{i,j} = \frac{W_{i,j+1} - 2W_{i,j} + W_{i,j-1}}{r_i^2 h_2^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + 0(h_2^{2}) \ , \qquad (8)$$

$$\Lambda_{rr} W_{i,j} = \frac{(1+\frac{h_1}{2r_i}) W_{i+1,j} - 2W_{i,j} + (1-\frac{h_1}{2r_i}) W_{i-1,j}}{h_1^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial W}{\partial r}\right) + 0(h_1^2), \qquad (9)$$

где в случае секторного сечения вводим h_1 - шаг по r, h_2 - шаг по ϕ,

$$h_1 = \frac{1}{(\phi_N + 1) \cdot (M-1)}, \quad r_i = h_1 \cdot (i-1); \qquad h_2 = \frac{\phi_N}{N-1}, \quad \phi_j = h_2 \ (j\text{-}1). \qquad (10)$$

Аппроксимируя уравнение (6) схемой продольно-поперечной прогонки для *i* = 2, ... , M-1, *j* = 2, ... , N-1, для искомой функции *w* (*x, y*) на *n* –ом временном шаге $w_{i,j}^n = w\ (r_i, \phi_j, n\tau)$, а на $n+\frac{1}{2}$ –ом временном полушаге:

$$\widetilde{w}_{i,j} = w_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = w\ (r_i, \phi_j, (n+\tfrac{1}{2})\tau), \text{ где } n = 0, \tfrac{1}{2}, 1, 1\tfrac{1}{2}, 2, \ldots \qquad (11)$$

С учетом обозначений (8), (9), (10), (11) напишем уравнения (6), получим:

$$\frac{\widetilde{W}_{i,j} - W^n{}_{i,j}}{0.5\tau} = \frac{(1+\frac{h_1}{2r_i}) \widetilde{W}_{i+1,j} - 2\widetilde{W}_{i,j} + (1-\frac{h_1}{2r_i}) \widetilde{W}_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{r_i^2 h_2^2} + 1, \qquad (12а)$$

$$\frac{W_{i,j}^{n+1} - \widetilde{W}_{i,j}}{0.5\tau} = \frac{(1+\frac{h_1}{2r_i}) \widetilde{W}_{i+1,j} - 2\widetilde{W}_{i,j} + (1-\frac{h_1}{2r_i}) \widetilde{W}_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{W_{i,j+1}^{n+1} - 2W_{i,j}^{n+1} + W_{i,j-1}^{n+1}}{r_i^2 h_2^2} + 1, \qquad (12б)$$

для *i* = 2, …, M-1; *j* = 2, …, N-1, где за начальное условие будем принять

$$w_{i,j}^0 = 0, \qquad i = 1, \ldots, M; \qquad j = 1, \ldots, N. \qquad (13)$$

При расчетах для производных в граничных условиях используются аппроксимации первых и вторых порядков точности. При использовании аппроксимации первого порядка $\frac{\phi_N + 1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial \phi}\Big|_{\phi=\phi_N} = 0{,}052 W_{sh}$ из [1], имеют места

$$\widetilde{w}_{i,N} = \widetilde{w}_{i,N-1} + \frac{r_i}{\varphi_N + 1} h_2 0{,}052 W_{sh}, \qquad i = 2, \ldots, M\text{-}1, \qquad (14а)$$

$$w_{i,N}^{n+1} = w_{i,N-1}^{n+1} + \frac{r_i}{\varphi_N + 1} h_2 0{,}052 W_{sh}, \qquad i = 2, \ldots, M\text{-}1, \qquad (14б)$$

а при применении аппроксимации второго порядка точности имеет место

$$\widetilde{w}_{i,N}=\frac{4}{3}\widetilde{w}_{i,N-1}-\frac{1}{3}\widetilde{w}_{i,N-2}+\frac{r_i}{\varphi_N+1}h_2 0{,}052W_{sh},\quad i=2,\ldots,M-1, \text{ (15а)}$$

$$w_{i,N}^{n+1}=\frac{4}{3}w_{i,N-1}^{n+1}-\frac{1}{3}w_{i,N-2}^{n+1}+\frac{r_i}{\varphi_N+1}h_2 0{,}052W_{sh},\quad i=2,\ldots,M-1. \quad (15б)$$

Записываются условия прилипания (7а) и первый из (7б) в сеточных условиях

$$\widetilde{w}_{i,1}=0; \qquad i=1,\ldots,M,$$

(16а)

$$\widetilde{w}_{1,j}=0, \qquad \widetilde{w}_{M,j}=0, \qquad j=1,\ldots,N. \quad (17а)$$

$$w_{i,1}^{n+1}=0; \qquad i=1,\ldots,M,$$

(16б)

$$w_{1,j}^{n+1}=0, \qquad w_{M,j}^{n+1}=0, \qquad j=1,\ldots,N. \quad (17б)$$

На первом полушаге уравнения (12а) совместно с условиями (17а) составляет следующую замкнутую систему алгебраических уравнений

$$\widetilde{w}_{1,j}=0, \qquad j=2,\ldots,N, \quad (16в)$$

$$\widetilde{A}_i\widetilde{w}_{i-1,j}+\widetilde{B}\,\widetilde{w}_{i,j}+\widetilde{C}_i\widetilde{w}_{i+1,j}=f_{i,j}^n, \quad i=2,\ldots,M-1; \quad j=2,\ldots,N-1, \quad (18а)$$

$$\widetilde{w}_{M,j}=0, \qquad j=1,\ldots,N, \quad (17в)$$

которая решается методом прогонки, а полученным значениям добавляются значения из условий (16а) и (14а) или (15а).

Для второго полушага по времени уравнения (12б) совместно с условиями (17б) и (14б) или (15б) составляют замкнутую систему алгебраических уравнений:

$$w_{i,N}^{n+1}=w_{i,N-1}^{n+1}+\frac{r_i}{\varphi_N+1}h_2 0{,}052W_{sh}, \qquad i=2,\ldots,M-1, \quad (14б)$$

$$w_{i,j-1}^{n+1}+B\,w_{i,j}^{n+1}+w_{i,j+1}^{n+1}=\tilde{f}_{i,j}, \qquad i=2,\ldots,M-1;\ j=2,\ldots,N-1, \quad (18б)$$

$$w_{i,1}^{n+1}=0, \qquad i=1,\ldots,M,$$

(16в)

которая также решается методом прогонки, а полученным значениям добавляются значения из условий (16б) и (17б).

Здесь обозначены значения коэффициентов и свободных членов:

$$\tilde{A}_i=1-\frac{h_1}{2r_i}, \qquad \tilde{B}=-2\cdot\left(1+\frac{h_1^2}{\tau}\right), \qquad \tilde{C}_i=1+\frac{h_1}{2r_i}, \qquad B_i=-2\cdot\left(1+\frac{r_i^2h_2^2}{\tau}\right),$$

(19)

$$f_{i,j}^{n} = 2h_1^2 \cdot \left(\frac{1}{r_i^2 h_2^2} - \frac{1}{\tau}\right) W_{i,j}^{n} - \left(\frac{h_1}{r_i h_2}\right)^2 \cdot \left(W_{i,j+1}^{n} + W_{i,j-1}^{n}\right) - h_1^2 ,$$

(20)

$$\tilde{f}_{i,j}^{n} = 2r_i^2 h_2^2 \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{\tau}\right) \tilde{W}_{i,j} - \left(\frac{r_i h_2}{h_1}\right)^2 \cdot \left[\left(1 + \frac{h_1}{2r_i}\right) \tilde{W}_{i+1,j} + \tilde{A}_i \tilde{W}_{i-1,j}\right] - r_i^2 h_2^2.$$

(21)

Сопоставляя (16в) с алгебраическим уравнением (18а) при i = 2, определив

$$\tilde{w}_{2,j} = -\frac{\tilde{C}_1}{\tilde{B}} \tilde{w}_{3,j} + \frac{1}{\tilde{B}} f_{2,j}^{n}, \qquad i = 2; \qquad j = 2, \ldots, N\text{-}1, \qquad (18в)$$

можно найти начальные значения коэффициентов прогонки

$$\tilde{X}_2 = -\frac{\tilde{C}_1}{\tilde{B}}; \qquad \tilde{Y}_{2,j} = f_{2,j}^{n}/\tilde{B}, \qquad j = 2, \ldots, N\text{-}1. \qquad (22)$$

Соотношения прогонки составляется сопоставлением следующих формул

$$\tilde{A}_i \tilde{w}_{i-1,j} + \tilde{B} \tilde{w}_{i,j} + \tilde{C}_i \tilde{w}_{i+1,j} = f_{i,j}^{n}, \qquad i = 3, \ldots, M\text{-}1; \; j = 2, \ldots, N\text{-}1,$$

(18а)

$$\tilde{w}_{i,j} = \tilde{X}_i \tilde{w}_{i+1,j} + \tilde{Y}_{i,j}, \qquad (23)$$

откуда и получим

$$\tilde{w}_{i,j} = -\frac{\tilde{C}_i}{\tilde{A}_i \tilde{X}_{i-1} + \tilde{B}} \tilde{w}_{i+1,j} + \frac{f_{i,j}^{n} - \tilde{A}_i \tilde{Y}_{i-1,j}}{\tilde{A}_i \tilde{X}_{i-1} + \tilde{B}}, \qquad (24)$$

$$\tilde{X}_i = -\frac{\tilde{C}_i}{\tilde{A}_i \tilde{X}_{i-1} + \tilde{B}}, \qquad i = 3, \ldots, M\text{-}1; \qquad \tilde{Y}_{i,j} = \frac{f_{i,j}^{n} - \tilde{A}_i \tilde{Y}_{i-1,j}}{\tilde{A}_i \tilde{X}_{i-1} + \tilde{B}}, \; j = 2, \ldots, N\text{-}1. \qquad (25)$$

Сопоставляя (15б) с алгебраическим уравнением (18б) при j = N-1

$$W_{i,N-2}^{n+1} - 4W_{i,N-1}^{n+1} + 3W_{i,N}^{n+1} = \frac{r_i}{\varphi_N + 1} h_2 0{,}052 W_{sh}, \quad i = 2, \ldots, M\text{-}1. \qquad (15г)$$

$$W_{i,N-2}^{n+1} + B W_{i,N-1}^{n+1} + W_{i,N}^{n+1} = \tilde{f}_{i,N-1}, \qquad i = 2, \ldots, M\text{-}1,$$

(18г)

Для второго полушага будем получить следующую систему:

$$W_{i,1}^{n+1} = 0, \qquad i = 1, \ldots, M,$$

(16в)

$$w_{i,j-1}^{n+1} + B w_{i,j}^{n+1} + w_{i,j+1}^{n+1} = \tilde{f}_{i,j}, \quad i = 2, \ldots, M\text{-}1; \; j = 2, \ldots, N\text{-}1, \qquad (18б)$$

$W_{i,N}^{n+1}$= (2+$\frac{B}{2}$)$W_{i,N-1}^{n+1}$+ $\frac{r_i}{\varphi_N+1}$ $h_2$0,052W_{sh}- $\frac{1}{2}$ $\tilde{f}_{i,N-1}$, i = 2, …, M-1.

(18д)

Из последнего уравнения полученной системы имеем

X_N= 2+$\frac{B}{2}$; $Y_{i,N}$= $\frac{r_i}{\varphi_N+1}$ $h_2$0,052W_{sh}- $\frac{1}{2}$ $\tilde{f}_{i,N-1}$, i = 2, …, M-1,

(26)

а для i = 2, …, M-1; j = N-1, …, 2 имеются рекуррентные соотношения

X_j= -$\frac{1}{B+X_{j+1}}$; $Y_{i,j}$= $\frac{\tilde{f}_{i,j}-Y_{i,j+1}}{B+X_{j+1}}$, i = 2, …, M-1; j = N-1, …, 2. (27)

Полученной формулой прогонки определяются скорости

$w_{i,j}^{n+1}$= X_j $w_{i,j-1}^{n+1}$+$Y_{i,j}$, i = 2, …, M-1; j = 2, …, N-1, (28)

которая также решается методом прогонки, а полученным значениям добавляются значения из условий (16б) и (17б). Недостающие же значения в данной области добавляются из еще неиспользованных граничных условий.

Итак, для одного шага по времени во всей области определяется поле скоростей, а для следующего шага по времени счет повторяется аналогично предыдущему случаю. Воспользуемся также формулами:

$\Delta S_{i,j}$= $(r_{i+1}-r_i)\frac{(r_{i+1}+r_i)(\phi_{j+1}-\phi_j)}{2}$= $\frac{(r_{i+1}^2-r_{i\backslash}^2)(\phi_{j+1}-\phi_j)}{2}$, (26а)

соответствующая средняя скорость вычисляется по формуле

$(w_{i,j})_{ср} = \frac{1}{4}(w_{i,j}+w_{i+1,j}+w_{i,j+1}+w_{i+1,j+1})$,

(26б)

Процесс попеременного вычисления поля скоростей по каждому шагу по времени продолжается до тех пор, пока суммарные скорости последующего и предыдущего временного слоя мало отличается друг от друга, то есть удовлетворяет определенной точности ε. Зная суммарные скорости, для каждого шага по времени вычисляется безразмерная функция расхода

$Q^n = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{M-1}\left[\sum_{l=1}^{N-1}\left(W_{i,j}^n+W_{i+1,j}^n+W_{i,j+1}^n+W_{i+1,j+1}^n\right)\cdot\Delta S_{i,j}\right]$.

(27)

а общий счет схемы продолжается до выполнения неравенства

$\frac{|Q^{n+1}-Q^n|}{|Q^{n+1}|} \le \varepsilon = 0{,}00001$, (28)

после чего можно положить $Q(\phi_N, U_{sh}) = Q^{n+1}$.

Был составлен общий алгоритм и соответствующая программа решения задачи, составлены графики, указывающие на картину течения жидкости.

Использовались размеры сеток: сначала для MxN = 11x11; а также и для MxN =21x21, и в этих сеточных значениях были получены распределения скоростей по некоторым радиальным направлениям r_i=Δr (i - 1) =$h_1 \cdot (i-1)$, при изменении ϕ_j = $\Delta\phi$ (j-1) =h_2 (j-1). Приведены результаты расчетов для разных параметров формы ϕ_Nпри заданной длине периметра χ.

Будем привести сначала одного из выведенных табличных данных результата вычисления с использованием значений при выборе сеточных значений MxN = 11x11, для χ = 3, 4, 8; $\phi_N = \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$ и некоторые другие, показанные на верхней строке ниже табличного вывода, выделенной жирным шрифтом. Там же в нижних строках: на верхней части расположенные нулевые значения соответствуют условию прилипания крайне левой точки, откуда начинаются радиальные узловые оси; на нижней части расположенные нулевые значения соответствуют условию прилипания крайне правой линии, где заканчиваются радиальные узловые оси; на крайне левой части табличного вывода нулевые значения соответствуют условию прилипания самой нижней радиальной линии; а на крайне правой части табличного вывода **ненулевые** значения соответствуют условию на свободной поверхности .

Ниже на рисунках 2а, 2б, 2в графически представлены семейства распределения скоростей для столбцов j=1, 2, …, 11, соответствующие значениям, расположенные на столбцах таблицы 1: $w_{i,1}$=w (r_i,ϕ_1); …; $w_{i,11}$=w (r_i,ϕ_{11}) при USH=0, силы трения на свободной поверхности 0.

Таблица 1

HAPPA= 4.0 USH= 0.0 ALF=0.000 PHN= 1.0472 R1=0.00000 RM=1.31268 QWS= 0.00794

0.0 0.0002 0.0015 0.0014 0.0036 0.0048 0.0070 0.0091 0.0120 0.0159 0.0000
0.0 0.0002 0.0015 0.0015 0.0037 0.0051 0.0075 0.0100 0.0136 0.0188 0.0000
0.0 0.0003 0.0018 0.0022 0.0048 0.0068 0.0097 0.0130 0.0174 0.0238 0.0000
0.0 0.0003 0.0020 0.0025 0.0052 0.0074 0.0106 0.0141 0.0189 0.0259 0.0000
0.0 0.0003 0.0021 0.0027 0.0055 0.0078 0.0111 0.0148 0.0198 0.0271 0.0000
0.0 0.0003 0.0021 0.0028 0.0056 0.0080 0.0114 0.0151 0.0201 0.0276 0.0000
0.0 0.0003 0.0021 0.0029 0.0056 0.0081 0.0114 0.0151 0.0202 0.0275 0.0000

0.0 0.0003 0.0020 0.0029 0.0055 0.0080 0.0112 0.0149 0.0197 0.0267 0.0000
0.0 0.0003 0.0017 0.0028 0.0050 0.0075 0.0103 0.0137 0.0180 0.0241 0.0000
0.0 0.0002 0.0012 0.0023 0.0036 0.0057 0.0077 0.0102 0.0132 0.0173 0.0000
0.0 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

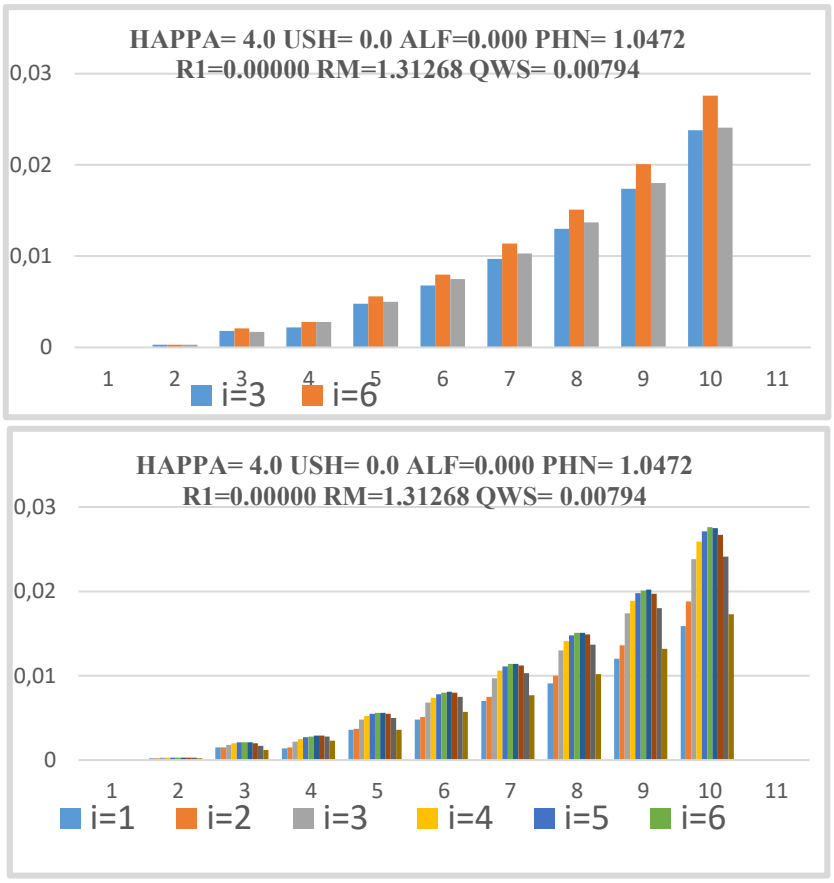


Рис. 2: а) Данные столбцов 3, 6 и 11; б) По данным всех столбцов таблицы 1.

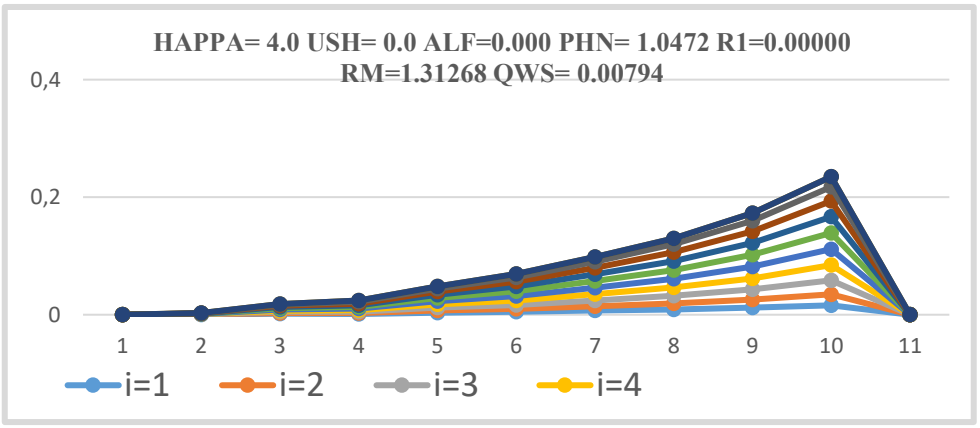


Рис. 2в. По данным всех столбцов таблицы 1.

Результаты расчёта скоростей W в канале секторного сечения при фиксированных значениях HAPPA = 8.0 [5] и PHN = 0.2618 (угол 15°) для USH = {-2.0, -1.5, -1.0, -0.5, +0.0, +0.5, +1.0, +1.5, +2.0}. Для каждого значения USH получены числовые значения w (r_i,ϕ_j, USH) на сетке 21×21, затем графическое представление этих значений в виде изотах (линий равных скоростей).

Таблица 2

HAPPA = 8.0 USH = -2.0 PHN = 0.2618 (15°) RM = 6.3402 SQ = 0.5045 QWS = 0.04138

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
0	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
0	0.0004	0.0005	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
0	0.0006	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
0	0.0009	0.001	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.001	0.001
0	0.0011	0.0013	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0013
0	0.0014	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017
0	0.0017	0.002	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.002	0.002	0.002
0	0.002	0.0024	0.0025	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024
0	0.0023	0.0028	0.0029	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028
0	0.0026	0.0032	0.0033	0.0033	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032
0	0.003	0.0036	0.0037	0.0037	0.0037	0.0037	0.0037	0.0037	0.0036	0.0036
0	0.0034	0.004	0.0041	0.0041	0.0041	0.0041	0.0041	0.0041	0.0041	0.0041
0	0.0038	0.0045	0.0046	0.0046	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045
0	0.0043	0.0051	0.0052	0.0051	0.0051	0.0051	0.0051	0.0051	0.0051	0.0051
0	0.005	0.0062	0.0063	0.0063	0.0063	0.0062	0.0062	0.0062	0.0062	0.0062
0	0.0069	0.0092	0.0099	0.0101	0.0102	0.0102	0.0103	0.0103	0.0102	0.0102
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.0001	-0.0001	-0.0003	-0.0004	-0.0007	-0.0014
0.0001	0.0001	0	0	-0.0001	-0.0002	-0.0004	-0.0008	-0.0014	-0.0027
0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	-0.0001	-0.0003	-0.0008	-0.0016	-0.0036
0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0001	-0.0001	-0.0004	-0.001	-0.0022	-0.0049
0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0003	0.0001	-0.0004	-0.0012	-0.0026	-0.006
0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0002	-0.0003	-0.0013	-0.003	-0.0071
0.001	0.001	0.001	0.0009	0.0007	0.0004	-0.0002	-0.0013	-0.0034	-0.0082
0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.001	0.0006	0	-0.0013	-0.0038	-0.0092
0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0013	0.0009	0.0002	-0.0013	-0.0041	-0.0102
0.002	0.002	0.0019	0.0018	0.0016	0.0012	0.0004	-0.0012	-0.0043	-0.0111
0.0024	0.0024	0.0023	0.0022	0.002	0.0016	0.0007	-0.0011	-0.0046	-0.012
0.0028	0.0028	0.0027	0.0026	0.0024	0.0019	0.001	-0.0009	-0.0048	-0.0128
0.0032	0.0032	0.0031	0.003	0.0028	0.0023	0.0013	-0.0007	-0.0049	-0.0137
0.0036	0.0036	0.0036	0.0034	0.0032	0.0027	0.0016	-0.0005	-0.005	-0.0144
0.0041	0.004	0.004	0.0039	0.0036	0.0031	0.002	-0.0002	-0.0051	-0.0152
0.0045	0.0045	0.0045	0.0043	0.0041	0.0036	0.0024	0	-0.0052	-0.0159
0.0051	0.0051	0.005	0.0049	0.0047	0.0041	0.0029	0.0004	-0.0053	-0.0166
0.0062	0.0062	0.0061	0.006	0.0057	0.0051	0.0037	0.0009	-0.0053	-0.0173
0.0102	0.0101	0.0099	0.0096	0.0091	0.008	0.0061	0.0024	-0.0048	-0.0175
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Численными расчетами получены значения поля скоростей при отрицательных и положительных значениях USH. Для USH = -2.0 (встречный ветер над свободной поверхностью) наблюдается зона обратного течения. Расход по сечению QWS = 0.04138 зависит и от площади сечения SQ = 0.5045, канала, уменьшается в зависимости от отрицательных значений W на свободной поверхности, как видно из нижней линии графика рисунка 8б.

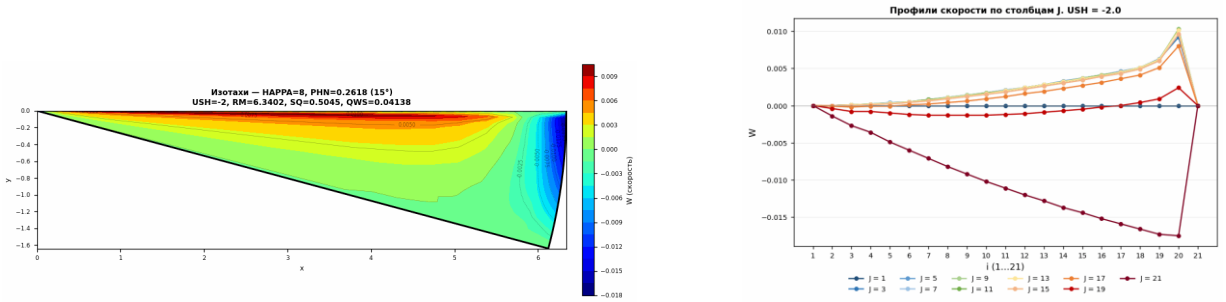


Рис. 8. а) Изотахи; б) Профили скоростей по столбцам J таблицы 2.

Далее, не приведя табличные значения вычислений, приведем каждого рисунка изотах (линии равных скоростей), линейно-точечного графика распределения скоростей вблизи свободной поверхности, где ощутимо меняются картина послойного течения жидкости.

Для USH = -1 наблюдается также зона обратного течения у внешней дуги канала (отрицательные W). Расход через сечение QWS = 0.04722.

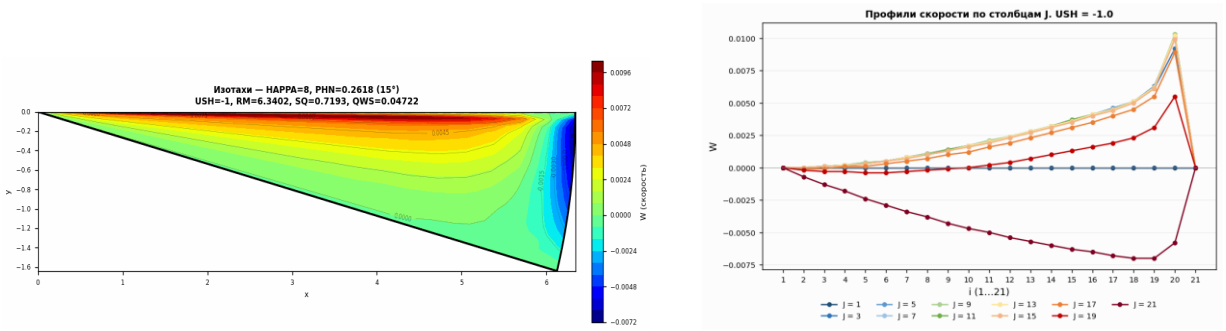


Рис. 9: а) Линии равных скоростей; б) Профили скоростей по столбцам J.

Для USH = - 0.5. При малом отрицательном значении USH (встречный ветер у свободной поверхности уменьшен) наблюдается небольшая зона обратного течения у свободной поверхности. Расход жидкости QWS = 0.04992.

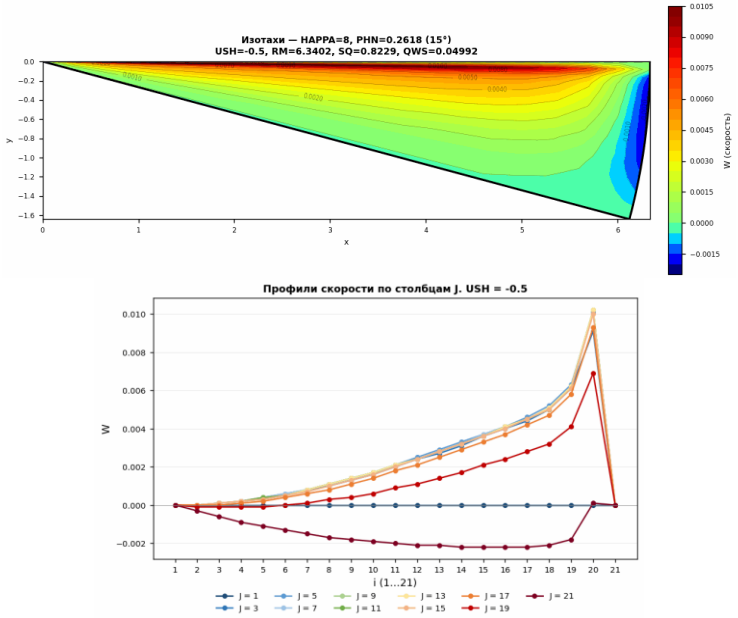


Рис. 10: а) Линии равных скоростей; б) Скорости по столбцам J.

Для USH = 0, ветер отсутствует, скорость во всей области неотрицательна, обратные слои течения не возникают. Расход через сечение QWS = 0.05268.

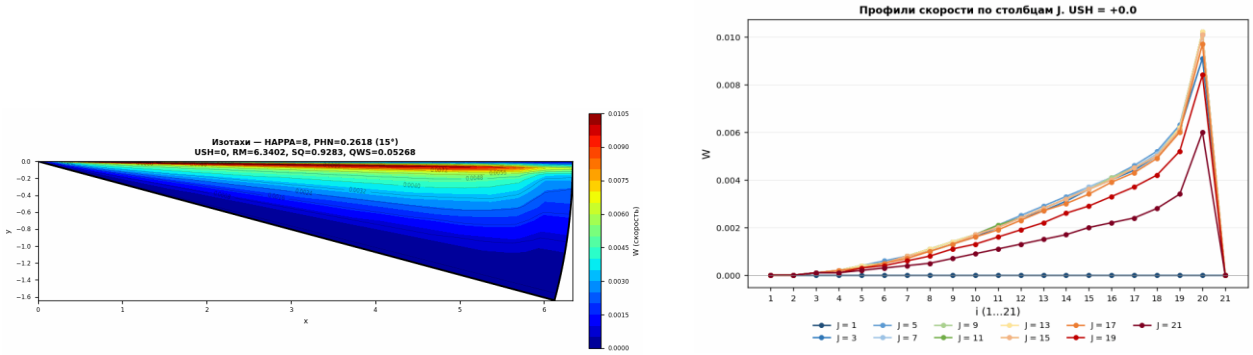


Рис. 11: а) Линии равных скоростей; б) Профили скоростей столбцов J.

Для USH = +1.0 (попутный ветер) скорость во всей области положительна, как на рис. 11б. Расход сравнительно увеличен QWS = 0.05821.

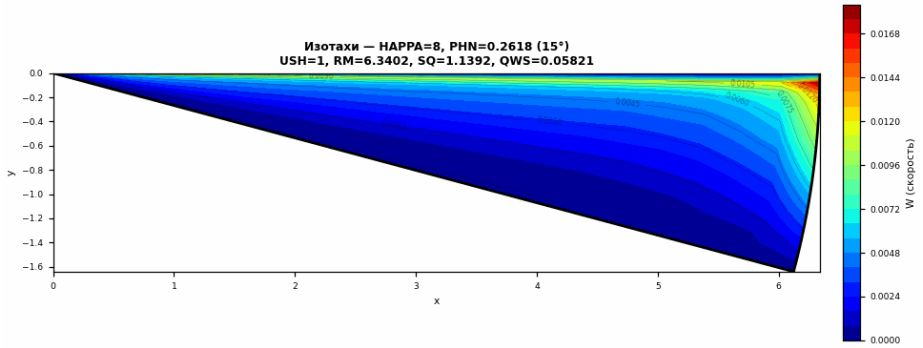


Рис. 12. Линии равных скоростей при USH = 1.

При USH = +2.0 скорость повсюду, и на свободной поверхности увеличивается (рис. 13б), и суммарно увеличен QWS = 0.06374.

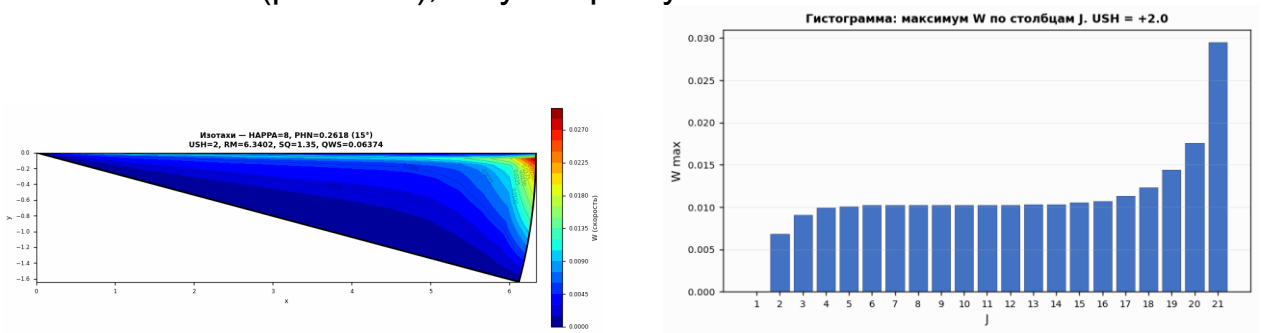


Рис. 13. а) Линии равных скоростей; б) Профили скоростей столбцов J.

Также приведены результаты расчёта для площади поперечного сечения канала SQ = 1.7263 для сравнительно расширенного угла сектора PHN = 0.5236 (= 30°). Для USH = -2.0, расход сравнительно уменьшен QWS = 0.18425 за счет влияния отрицательного трения на свободной поверхности (рис. 14б).

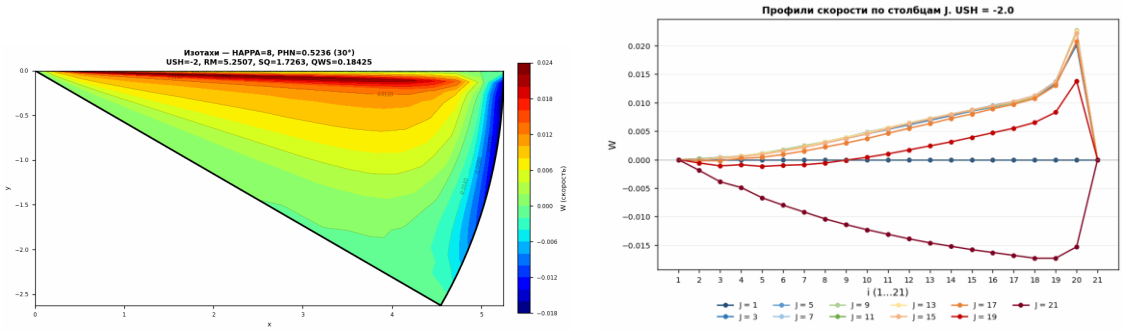


Рис. 14: а) Линии равных скоростей; б) Профили скоростей столбцов J.

При значении USH = 0, ветер отсутствует, скорость во всей области неотрицательна, расход QWS = 0.20464, а для USH = +2.0 скорость во всей области увеличивается, увеличивается и расход за счет попутного трения на свободной поверхности QWS = 0.22503.

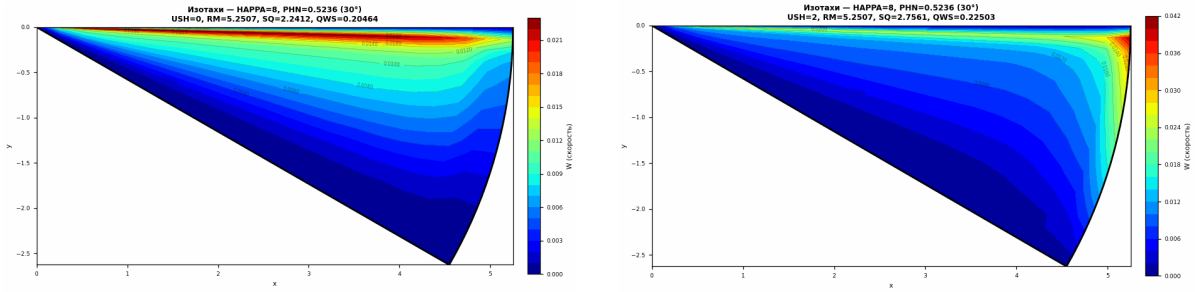


Рис. 15. Линии равных скоростей J: а) при USH = 0; б) при USH = + 2.

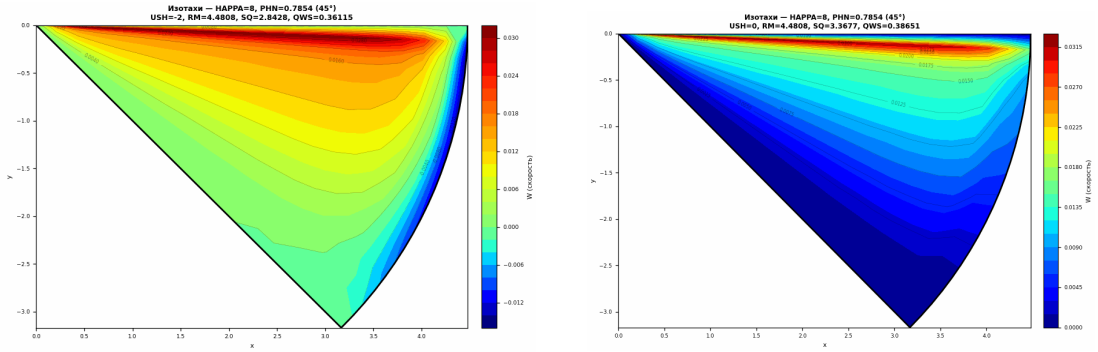


Рис. 16. Линии равных скоростей J: а) при USH = -2; б) при USH = 0.

Для еще более расширенного угла сектора PHN = 0.7854 (= 45°), и, следовательно, для площади поперечного сечения канала SQ = 2.8428, при USH = -2.0, QWS = 36115; для USH = 0, расход через сечение QWS = 0.38651 (рис. 16), а для USH = +2.0, QWS = 0.41187 (рис. 17б).

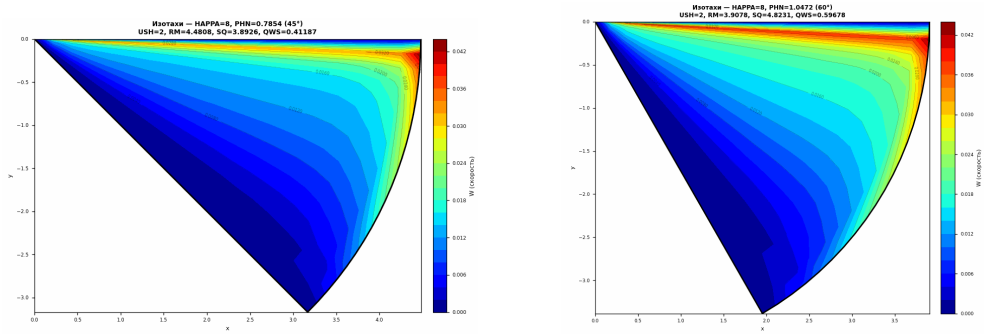


Рис. 17. Изотахи по J для USH = 2: а) при PHN = 45°; б) при PHN = 60°.

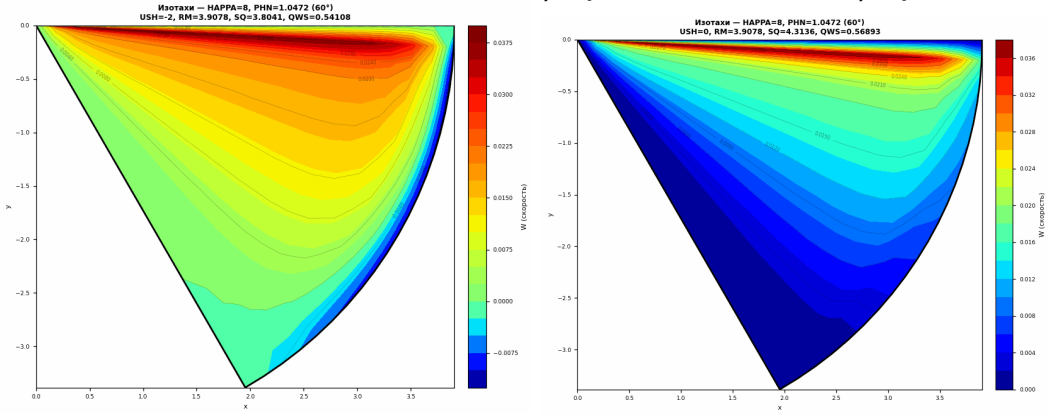


Рис. 18. Изотахи по J для PHN = 60°: а) при USH = -2; б) при USH = 0.

Для более расширенного угла сектора PHN = 1.0472 (= 60°), и, следовательно, для площади поперечного сечения канала SQ = 4.8231, при USH = -2.0, QWS = 0.36115; для USH = 0, расход через сечение QWS = 0.38651 (рис. 16), а для USH = +2.0, QWS = 0.41187 (рис. 17б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Распопин Г. А. Влияние стратификации на касательные напряжения между воздушным потоком и свободной поверхностью // Метеорология и гидрология. - 1971. - № 8. - С. 43-49.

2. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. –225 с.
3. Осмонов К.Т. Аналитическое и численное решения задач течения вязкой жидкости в открытых каналах при умеренных числах Рейнольдса: Дисс...к.ф.-м.н. М., 1993. 01.02.05; утв. 12.02.93. - Бишкек, 1992. – 99 с.
4. Чернов М. А. Обоснование противофильтрационной эффективности облицовок каналов с применением полимерных материалов / М. А. Чернов // Известия вузов. Сев.-Кав. регион, Техн. науки. – 2011. – № 2. С. 108-114.
5. Полиа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. Пер. с англ. / Под ред. А.Н. Копылова. – М.: Гос. изд. Физ.-мат. литературы, 1962. -336 с.