УДК 532.543

УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В НАКЛОННЫХ КАНАЛАХ

**Мекенбаев[1] Б.Т., Дуйшеналиев[2] Т.Б.,
Жолболдуев[1] Н.П., Матраим к. Б.[1]**
[1]Кыргызский технический университет им. И.Раззакова,
[2]Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия

В работе рассматривается нестационарное течение потока жидкости на наклонных каналах. Показано, что сумма кинетических энергий потока и разрывных волн, и потенциальной энергии потока остаётся постоянной для любого сечения. Основной математической моделью, описывающей динамику перемещения потоков жидкости в наклонных каналах с ровным дном, является система уравнений мелкой воды. При нестационарном течении скорость потока изменяется пропорционально изменению скорости разрывных волн по длине потока. Показано, что уравнение Бернулли для нестационарного течения на основе уравнения мелкой воды удовлетворяется в том случае, если от скорости потока вычитать скорость разрывных волн. Полученное выражение демонстрирует закон сохранения энергии движущейся жидкости, а также взаимосвязь между средней скоростью потока, давлением и скоростью разрывных волн в разных сечениях потока.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, разрывные волны, наклонный канал, нестационарное течение, уравнения Бернулли.

ЖАНТАЙГАН КАНАЛДАРДАГЫ СУЙУКТАРДЫН СТАЦИОНАРДЫК АГЫМЫ УЧУН БЕРНУЛЛИНИН ТЕНДЕМЕЛЕРИ

**Мекенбаев[1] Б.Т., Дуйшеналиев[2] Т.Б.,
Жолболдуев[1] Н.П., Матраим к. Б[1]**
[1] И.Раззаков атындагы Кыргыз техникалык университети,
[2] "МЭИ" Улуттук изилдөө университети, Москва, Россия

Макалада жантайган каналдар боюнча суюктуктун агымынын туруксуз агымын каралган. Агым менен үзгүлтүксүз толкундардын

кинетикалык энергияларынын суммасы, ал эми агымдын потенциалдык энергиясы ар кандай кесим үчүн туруктуу бойдон кала тургандыгы көрсөтүлгөн. Жалпак түбү бар жантайыңкы каналдардагы суюктуктун агымынын динамикасын сүрөттөгөн негизги математикалык модель тайыз суу теңдемелеринин системасы болуп саналат. Туруксуз агымда агымдын ылдамдыгы агымдын узундугу боюнча үзгүлтүксүз толкундардын ылдамдыгынын өзгөрүшүнө пропорционалдуу өзгөрөт. Эгерде агымдын ылдамдыгынан үзгүлтүксүз толкундардын ылдамдыгын алып таштаса, тайыз суу теңдемесинин негизиндеги туруксуз агым үчүн Бернуллинин теңдемеси аткарыла тургандыгы көрсөтүлгөн. Алынган туюнтма кыймылдуу суюктуктун энергиясынын сакталуу мыйзамын, ошондой эле агымдын ар кандай участокторундагы агымдын орточо ылдамдыгы, басымы жана үзгүлтүксүз толкундардын ылдамдыгы ортосундагы байланышты көрсөтөт.

***Баштапкы сөздөр**:* тайыз суу теңдемелери, үзгүлтүксүз толкундар, жантайган канал, туруксуз агым, Бернулли теңдемелери.

BERNOULLI'S EQUATION FOR NON-STATIONARY FLUID FLOW IN INCLINED CHANNELS

Mekenbaev1 B.T., Duishenaliev2 T.B.,
Zholbolduev1 N.P., Matraim k. B.1
[1]Kyrgyz Technical University named after I. Razzakov,
[2]National Research University "MEI", Moscow, Russia

Unsteady liquid flow in inclined channels is considered in the work. It is shown that the sum of the flow of kinetic energy and breaking waves and the flow of potential energy remains constant for any section. The basic mathematical model that describes the dynamics of liquid flow in inclined channels with a flat bottom is the system of shallow water equations. In unsteady flow, the flow speed changes proportionally to the change in the speed of the breaking waves along the flow. It is shown that the Bernoulli equation for unsteady flow based on the equation of shallow water is satisfied if the velocity of breaking waves is subtracted from the flow velocity. The resulting expression demonstrates the law of conservation of energy of a moving fluid, as well as the relationship between the average flow speed, pressure and speed of discontinuous waves in different sections of the flow.

Key words: equations of shallow water, breaking waves, inclined channel, unsteady flow, Bernoulli's equation.

Уравнения мелкой воды, являясь системой нелинейных гиперболических уравнений, аппроксимируют полную систему уравнений Эйлера, описывающую течение несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести, и широко используются для описания различных физических явлений [1-8].

Для моделирования движения жидкости по наклонному каналу была взята математическая модель на основе уравнений мелкой воды. Она учитывает турбулентное трение о дно и использует осредненное по слою значение скорости [1-5].

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} = \alpha g \end{cases}, \tag{1}$$

где *u* - скорость потока, g - ускорение свободного падения, *h* - уровень жидкости над дном канала, α=sinθ-μcosθ, θ – угол наклона поверхности дна, μ=tgφ, φ-динамический угол трения.

Принимая следующую подстановку [4,5,6]:

$$\varepsilon\frac{\partial h}{\partial x} = h\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{3}$$

первое уравнение системы (1) с помощью выражения (2) представим в следующем виде:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

а выражение (3) позволит привести второе уравнение системы (1) к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} = g\alpha, \tag{5}$$

где ε - скорость разрывных волн.

Теперь, с помощью выражений (4) и (5) из [2-6]

$$h = \frac{1}{g}(u-\varepsilon)^2, \tag{6}$$

получим

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = g\alpha. \tag{7}$$

В работе [3,4] показано, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \tag{8}$$

Проинтегрировав последнее выражение (8), получим:

$$u = \frac{2}{3}\varepsilon + f(t) + d. \tag{9}$$

Здесь *f(t)* - некоторая произвольная функция, зависящая от *t*, а *d* – постоянная интегрирования. Подстановка (9) в (6) нам дает выражение для высоты потока:

$$h = \frac{1}{9g}(3d + 3f(t) - \varepsilon)^2. \tag{10}$$

Подстановка уравнения (8) в выражение (3) дает:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(gh + \frac{1}{2}\left(u^2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2\right)\right) = 0. \tag{11}$$

Примем следующее подстановку:

$$v^2 = u^2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2 . \tag{12}$$

Тогда уравнение (11) можем представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(gh + \frac{1}{2}\left(u^2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(gh + \frac{1}{2}v^2\right) = 0 . \tag{16}$$

Скорость *v* – это скорость потока, который в данный момент времени соответствовал бы стационарному состоянию. В стационарном состоянии на часть элемента из соседних частиц не поступает жидкость. В нестационарном же случае - поступает. Это значит, что жидкость в рассматриваемую частицу поступает со скоростью ε.

Уравнение (4) можно представить в виде (рис. 1):

$$\Delta h \Delta x = \varepsilon(h_2 - h_1)\Delta t. \tag{15}$$

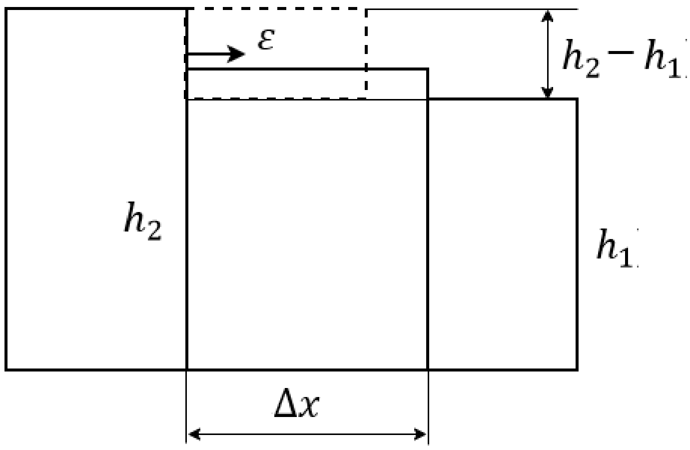

Рис. 1. Геометрическая интерпретация уравнения (15)

Правая часть уравнения (15) представляет объем жидкости, который поступает в среднюю частицу из соседних частиц (на рис. 1, это объем показан прерывистой линией), а его левая часть – на сколько увеличится объем средней частицы.

Проинтегрировав уравнение (16) видим, что в рассматриваемый момент времени выполняется следующее выражение:

$$gh + \frac{1}{2}\left(u^2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2\right) = gh + \frac{1}{2}v^2 = g(t) + const\,. \qquad (16)$$

Для разных сечений потока получим:

$$gh_1 + \frac{1}{2}\left(u^2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2\right)_1 = gh_2 + \frac{1}{2}\left(u^2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2\right)_2. \qquad (16)$$

Для определения произвольной функции *f(t)*, функции скорости потока, определяемой выражением (9), подставляем в дифференциальное уравнение (5) и, после несложных преобразований, получим [4]:

$$f(t) = \frac{1}{3}g\alpha t + k, \qquad (17)$$

где k-постоянная интегрирования.

Таким образом, когда жидкость течет по наклонному каналу скорость и высота потока определяются уравнениями (9) и (10) с подстановкой в них функции (17):

$$u = \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}g\alpha t + d, \qquad (18)$$

$$h = \frac{1}{9g}(3d + g\alpha t - \varepsilon)^2. \qquad (19)$$

В этом случае скорость ε определяется выражением [2, 4]:

$$\varepsilon = \frac{x}{t} + \frac{1}{2}g\alpha t. \qquad (20)$$

Подставляя выражения (18-20) в уравнение (16), получим:

$$gh + \frac{1}{2}\left(u^2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2\right) = \frac{3}{2}\ (d + f(t))^2.$$

Выводы. При нестационарных течениях жидкости в каналах с ровным дном, сумма потенциальной и кинетической энергий потока и разрывных волн остаётся постоянной для любого сечения потока в рассматриваемый момент времени, что позволяет определить параметры нестационарного потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян А.С. Дополнительные главы теории мелкой воды // Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт космических исследований Российской академии наук (ИКИ РАН). Серия Механика, управление и информатика. – Москва, 2014. – 64 с.
2. Мекенбаев Б.Т. Автомодельное решение динамики гравитационных потоков в наклонных каналах / Б.Т.Мекенбаев, Ч.Т.Дуйшеналиев // Прикаспийский журнал: Управление и высокие технологии. – Астрахань, 2016. - №3. – С. 59-70.
3. Дуйшеналиев Т.Б. Автомодельное решение уравнения мелкой воды / Т.Б.Дуйшеналиев, Б.Т.Мекенбаев, Ш.Макеева // Наука, новые технологии Кыргызстана. - №4. – Бишкек. - №4, 2015. – С. 26-27.
4. Мекенбаев Б.Т. Трансформация уравнения мелкой воды над ровным дном / Б.Т.Мекенбаев, Ч.Т.Дуйшеналиев, Б.И. Ишенбекова // Инновационная наука в глобализующемся мире. Материалы IV Международной научно-практической конференции. Уфа, 15-16 марта 2017 г. – Уфа, 2017. – С. 81-86.
5. Дуйшеналиев Ч.Т. Решение уравнения мелкой воды преобразованием Лежандра / Ч.Т.Дуйшеналиев, Б.Т.Мекенбаев, Б.И.Ишенбекова, Тологон кызы Керемет // Современные проблемы

механики. Научно-технический журнал. - №35 (1). – Бишкек, 2019. – С. 46-52.

6. Дуйшеналиев Т.Б. уравнения Бернулли для нестационарного течения мелкой воды / Т.Б.Дуйшеналиев, Б.Т.Мекенбаев, К.К.Орозов // Горный журнал. Т. 1, 2020. – С. 98-102.
7. Богомолов С.В. Моделирование волн на мелкой воде методом частиц / С.В. Богомолов, Е.В. Захаров, С.В. Зеркаль // Математическое моделирование. Т. 14. - № 3, 2002. – С. 103-116.
8. Самедов С.А. Оценка последствий при разрушении гидротехнических сооружений / С.А.Самедов, М.Ю.Стриганова // Пожарная безопасность: проблемы и перспективы. Т. 1. - № 9, 2018. – С. 790-793.