



ISSN 1694-6065

**КОМИТЕТ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ КЫРГЫЗСТАНА**

**ИНСТИТУТ ГЕОМЕХАНИКИ И ОСВОЕНИЯ НЕДР
НАН КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**



СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

ВЫПУСК ДВАДЦАТЬ ВТОРОЙ

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА, ГЕОМЕХАНИКА И ГЕОТЕХНОЛОГИИ

БИШКЕК-2015

ББК 22.25
С 56

Утверждено в печати Президиумом Комитета по теоретической и прикладной механике Кыргызстана и Ученым Советом Института геомеханики и освоения недр НАН КР

Рецензенты: доктор физико-матем. наук, профессор Исманбаев А.И.
доктор технических наук, профессор Тажибаев К.Т.

Ответственный редактор: К.Ч. Кожогулов, член-корр. НАН КР

Редакционная коллегия:

Бийбосунов Б.И. - доктор физико-матем. наук, профессор;
Никольская О.В. - доктор технических наук;
Манжиков Б.Ц. - доктор физико-матем. наук;
Орозобекова А.К. - кандидат физико-матем. наук, доцент.

С 56 Современные проблемы механики сплошных сред: Вып.22:
Гидрогазодинамика, геомеханика и геотехнологии
/Комитет по теорет. и прикл. механике Кыргызстана, Институт
геомеханики и освоения недр НАН КР.-Б.: 2015. - 129 с.

ISSN 1694-6065

В сборник включены научные статьи, посвященные для изучения проблем гидрогазодинамики, геомеханики массивов горных пород, геотехнологии освоения недр, геоэкологии горнопромышленных регионов и современным аналитическим и численным методам решения краевых задач механики сплошных сред. В научных статьях изложены современные состояния решения задач гидрогазодинамики, рассматриваются вопросы экзогенно-геологических процессов и проблемы вычислительной математики.

Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и инженерно-технических специалистов в области геомеханики, геотехнологии и геоэкологии горнопромышленных регионов.

УДК 531
ББК 22.25

© Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана и Институт геомеханики и освоения недр НАН КР, 2015

УДК 624, 131:577,4

КОМБИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ПРОГНОЗА СМЕЩЕНИЯ ОПОЛЗНЯ

Ю.Г. Алешин, И.А. Торгоев

Институт геомеханики и освоения недр НАН КР.

Оползень-это нелинейная динамическая система, поведение который определяется геологическими, климатическими и другими условиями, в частности осадками, землетрясениями и деятельностью человека. Изменения в этих условиях играют критическую роль в развитии смещения. Во многих случаях, особенно в многоводные годы, изменения смещения оползней могут быть напрямую коррелированы с видимыми изменениями влияющих факторов. В то же время, качество такого прогноза все еще остается невысоким. Можно попытаться разработать такую модель прогноза, которая учитывала бы комплексно как механизм деформации, так и влияющие факторы. Такая модель предложена JuanDueta [1], которую мы попытаемся адаптировать применительно к реальному оползню Сары-Бээ в Майлуу-Суу, скорректировав некоторые элементы, и оценить эффективность её прогнозирующей способности.

В предлагаемой модели смещения оползней связываются с геологическими, гидрометеорологическими, гидрогеологическими условиями и внешними влияющими факторами. Общее смещение в плоскости скольжения разделяется на два компонента:

(1)-смещение, определяемое геологическими условиями в долгосрочной перспективе (фундаментальный аспект смещения);

(2)-смещение, зависящее от внешних факторов, которые меняются в течение короткого периода времени (как правило, весной каждого года).

Эти два компонента представляют приблизительно регулярные и ступенчато нарастающие смещения оползня. В модели временного ряда общее смещение по плоскости скольжения (сброса) A_t содержит четыре компонента отклика, указанные ниже:

$$A_t = S_t + C_t + t_t \pm E_t, \quad (1)$$

где: S_t, C_t, t_t —тренд, периодический член и пульсация, соответственно; а E_t — случайная переменная, отражающая неопределенность.

Переменная S_t отражает тенденцию развития оползневого смещения. Оно определяется потенциальной энергией и ограничивающими условиями смещения. Периодический член отражает компоненту смещения, вызванного периодическими изменениями иницирующего фактора(ов), например, разницей сезонных осадков, температур и уровня подземных вод. Член пульсации отражает отклик смещения, вызванный внезапным изменением (увеличением), например, интенсивности землетрясений.

В этой модели переменные рассматриваются как детерминированные по факту своего существования компоненты, однако случайные по параметрам проявления. Из-за различных механизмов каждого из компонентов смещения, общее смещение в плоскости сброса, измеренное в процессе мониторинга, т.е. первичные данные, также должны быть разделены на тренд и периодический член, и каждый из них может быть спрогнозирован отдельно с применением различных методик.

Разложение общего смещения на тренд и периодическую компоненту является основной предлагаемой детерминированно-стохастической модели. Если период временного ряда и влияющих факторов может быть определен точно, то изменения данных могут быть сглажены методом скользящего среднего, и составляющая в виде тренда смещения может быть извлечена из совокупности данных. Функция однократного скользящего среднего значения представлена в следующем уравнении:

$$\bar{S}_t^{(1)} = \frac{1}{N} (S_t + S_{t-1} + \dots + S_{t-N+1}), (t \geq N) \quad (2)$$

где: $\bar{S}_t^{(1)}$ - единичное значение скользящего среднего первой итерации в t -ом моменте времени; S_t - контролируемое смещение в t -ом моменте времени; N - цикл скользящего среднего.

Для того, чтобы ослабить и даже практически полностью устранить периодические и беспорядочные колебания во временном ряде можно будет использовать метод двойного скользящего среднего значения

$$\bar{S}_t^{(2)} = \frac{1}{N} \left(\bar{S}_t^{(1)} + \bar{S}_{t-1}^{(1)} + \dots + \bar{S}_{t-N+1}^{(1)} \right), (t \geq 2N - 1), \quad (3)$$

где: $\bar{S}_1^{(2)}$ - скользящее среднее второго порядка в t -ом моменте времени.

Вместе с тем, с увеличением порядка скользящего среднего появляется погрешность типа гистерезиса. Поэтому в нашей работе используется сглаживание скользящим средним порядка не более, чем второй.

После того, как временной ряд содержит только член, отражающий тренд, одним из достоверных методов прогноза является регрессионная модель, адекватно описывающая процесс смещения,

например, в виде закона ползучести. Можно выбрать следующие типы моделей:

- обобщенный закон Саито [2]:

$$S_t = \frac{a}{(n-1)(b-t)^{n-1}} \pm E_t \quad (4)$$

- “индуктивная” модель Kawamura [3]:

$$S_t = \frac{1}{ab} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{t}{b-t} \frac{b-t_0}{t_0} \right\} \pm E_t \quad (5)$$

-инверсионная функция Verhulst[4];

$$S_t = \frac{1}{a} \operatorname{Ln} \frac{(a-bt_0) \cdot t}{(a-bt)t_0} + S_0 \pm E_t \quad (6)$$

В уравнениях (4-6) a, b, n -параметры, подлежащие определению методами регрессионного анализа (например, наименьших квадратов), S_0 начальное смещение при $t = t_0$.

Использование уравнении регрессии $S(t)$ в рекомендованном нами виде (4 и 5) сразу же определяет ситуацию, несколько велико еще в среднем “время жизни” оползневого склона $\tau_t = b - t_t$ в (4.11 и 4.12) или $\tau_t = \frac{a}{b} - t_t$ в (6), в отличии от рекомендаций, где предлагается в качестве функции регрессии $S(t)$ выбрать полиномиальную модель невысокой степени ($n = 2; 3$), которая более или менее достоверно описывает процесс вторичной стадии ползучести, весьма далёкой от разрушения. С точки зрения теории прогнозирования выделение тренда решает задачу долгосрочного прогнозирования времени обрушения склона.

Периодическая составляющая оползневого смещения вызвана множеством переменных, и зависимость отклика трудно описать

обычными аналитическими методами. Как правило, при этом удаётся получить многомерные нелинейные регрессии второго порядка, которые довольно грубо описывают динамику оползневого смещения на коротких временных интервалах. Лучших результатов можно добиться при использовании нейросетевого прогнозирования [5,6] путём предварительного обучения нейросетевого автомата. Широко распространенным методом обучения является алгоритм обратного распространения ошибок. Автомат формирует сеть (обучается) на примере, который состоит из некоторого числа входных образцов с описанием свойств и известным правильным результатом идентификации для каждого из них. Эти примеры “входа-выхода” используется для получения функции ограниченного отображения (скрытый слой) после синтеза нейросети, при этом алгоритм обратного распространения ошибок позволяет адаптировать сеть к другим исходным данным. Доказано [7], что трехслойная нейросетевая модель с алгоритмом обратного распространения ошибок может эффективно аппроксимировать любую функцию. В предлагаемой методике нейронная сеть, сформированная с использованием алгоритма обратного распространения ошибок, принята для прогнозирования компонента периодического оползневого смещения.

Прогноз полного смещения может быть получен путем сложения двух составляющих: тренда и периодического компонентов. Рис.1 описывает процесс анализа модели прогноза в виде блок схемы.

Для мониторинга смещения оползневой участок был оборудован сетью реперов, состоящей из 18 реперов (4 опорных и 14 в движущемся оползне) для рулеточных измерений по двум створам. Смещения по линии падения склона (головной) части оползня использовались для определения модели прогноза, при этом данные по двум створам усреднялись.

Анализ метеорологических данных проводился по метеостанции “Массы” (“Ленин -жол”), уровень грунтовых вод по скважине № 10, пройденной вблизи изучаемого оползня. Данные по параметрам землетрясений были взяты по таблице “NEIC: EarthquakeSearchResults” (U.S. GeologicalSurveyEarthquakeDataBase) в радиусе 200 км от Майлуу-Суу. Интенсивность сотрясений оценивалась по А.В. Шебалину:

$$J(r) = bM - vlg\sqrt{r^2 + h^2 + C}, \quad (7)$$

где: b, v, c -региональные коэффициенты; M -магнитуда землетрясения; $J(r)$ - интенсивность сотрясений в баллах на расстоянии r , км; h -глубина очага, км.

Имея в виду, что интенсивность сейсмической волны как количество энергии, переносимой этой волной в одну секунду через единичную

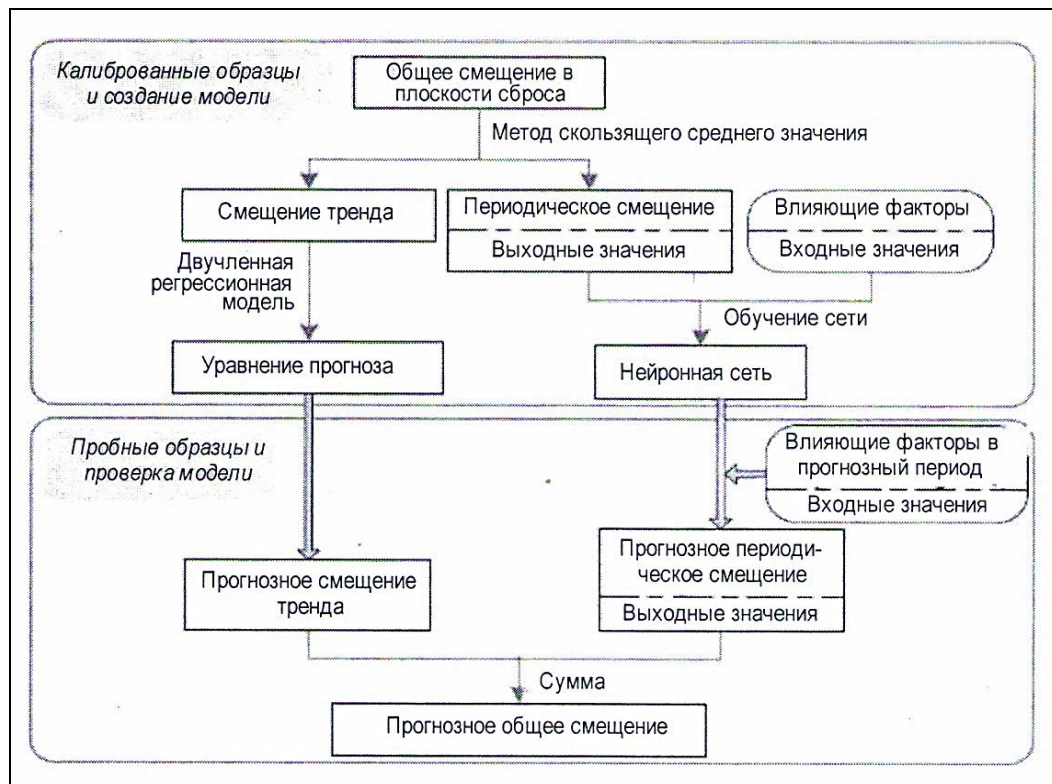


Рис.1. Блок-схема процедуры выработки прогнозного решения по предлагаемой модели.

площадку в направлении распространения волны, определяется амплитудой смещения, скоростью распространения, частотой колебаний и плотностью грунтов, можно определить некоторую величину $\Delta l g$, пропорциональную общей энергии от N -ряда отдельных сейсмических событий как

$$\Delta l g \sim K \sum_{i=1}^N \exp \{U_i(r)\} \quad (8)$$

Благодаря подобному преобразованию удастся импульсную составляющую влияющих факторов привести к циклическим.

Данные мониторинга оползневого смещения и влияющих факторов приведены на рис. 2.

Определение периодических влияющих факторов является критически важным для достоверного прогноза и корректного описания отклика смещения оползня. В противном случае увеличивается шумовая составляющая процесса смещения и его мониторинга, который маскирует основные соотношения между инициирующими факторами и откликом. На основе анализа логико-математической модели механизма деформации гидрогенного оползня были выбраны следующие факторы:

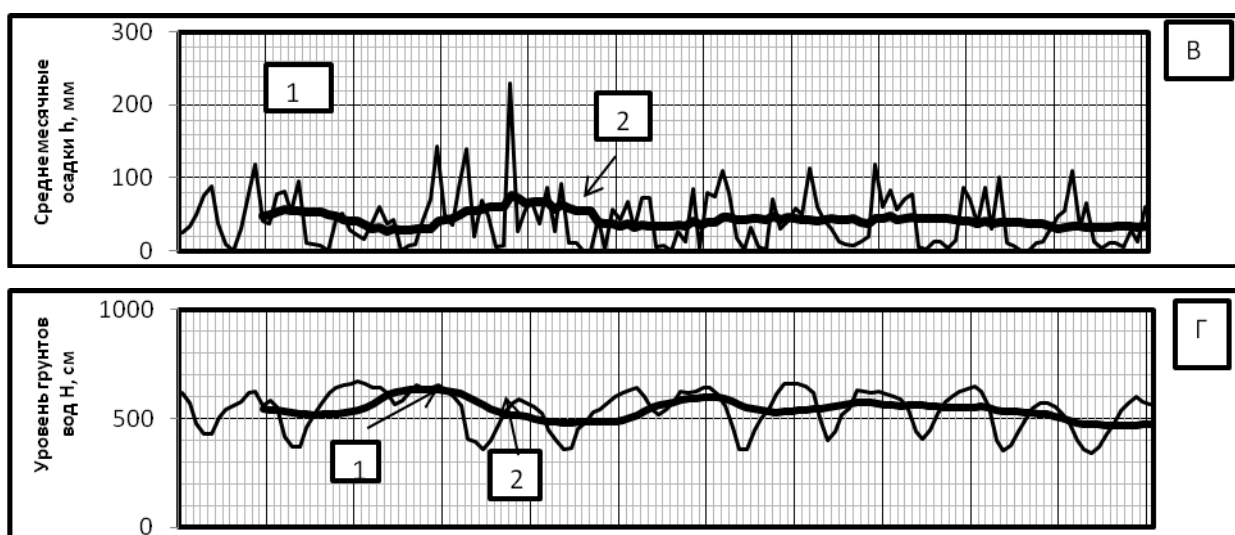
C_{1t} -накопленные осадки за текущий месяц по его завершению (h_i , мм); C_{2t} -накопленные осадки за 3 прошедших месяца ($\sum_{i-2}^i h$, мм); C_{3t} -уровень грунтовых вод в текущий месяц средний (H_i), см; C_{4t} -уровень грунтовых вод минимальный по состоянию на начало года (H_{min} , см); C_{5t} -изменения уровня грунтовых вод в среднем за предыдущий и текущий месяцы $\Delta H = H_i - H_{i-1}$, см; C_{6t} -среднемесячная температура текущего месяца по его завершению (T_{cp} , °C); C_{7t} -среднемесячная температура воздуха за 3 прошедших месяца ($\frac{1}{3} \sum_{i-2}^i T_{cp}$, °C); C_{8t} -приращение накопленного смещения за двенадцать

предыдущих месяцев $(\sum_{i=12}^i S)C_{9t}$ -энергетический показатель сейсмического воздействия за предшествующий год $\mathcal{E}_{egi}$, год⁻¹.

В качества объекта прогноза выбрана величина смещения оползня Δl_{ti} за каждый месяц текущего года, начиная с января, при этом $\Delta l_{ti} = S_{ti} - \hat{S}_{ti}$.

Матрицы исходных данных для обучения нейросетевого автомата представлена в табл.1, корреляционная матрица- в табл.2, график периодической составляющей смещения- на рис.3.

Для периода сезона дождей и подъема уровня, грунтовых вод быстрое смещение начинается ежегодно с конца марта и продолжается до июня. Это же наблюдается для большинства оползней Юго-Западного Тянь-Шаня. Наименьшие величины смещения оползня Сары-Бээ в весенний период наблюдались в 1986, 1990, 1991и 1992 году при малой интенсивности осадков и низком уровне стояния грунтовых вод. Временное относительно устойчивое состояние наблюдалось ежегодно во вторую половину года, что связано с практически полнымпрекращением атмосферныхосадков и понижением уровня грунтовых вод.



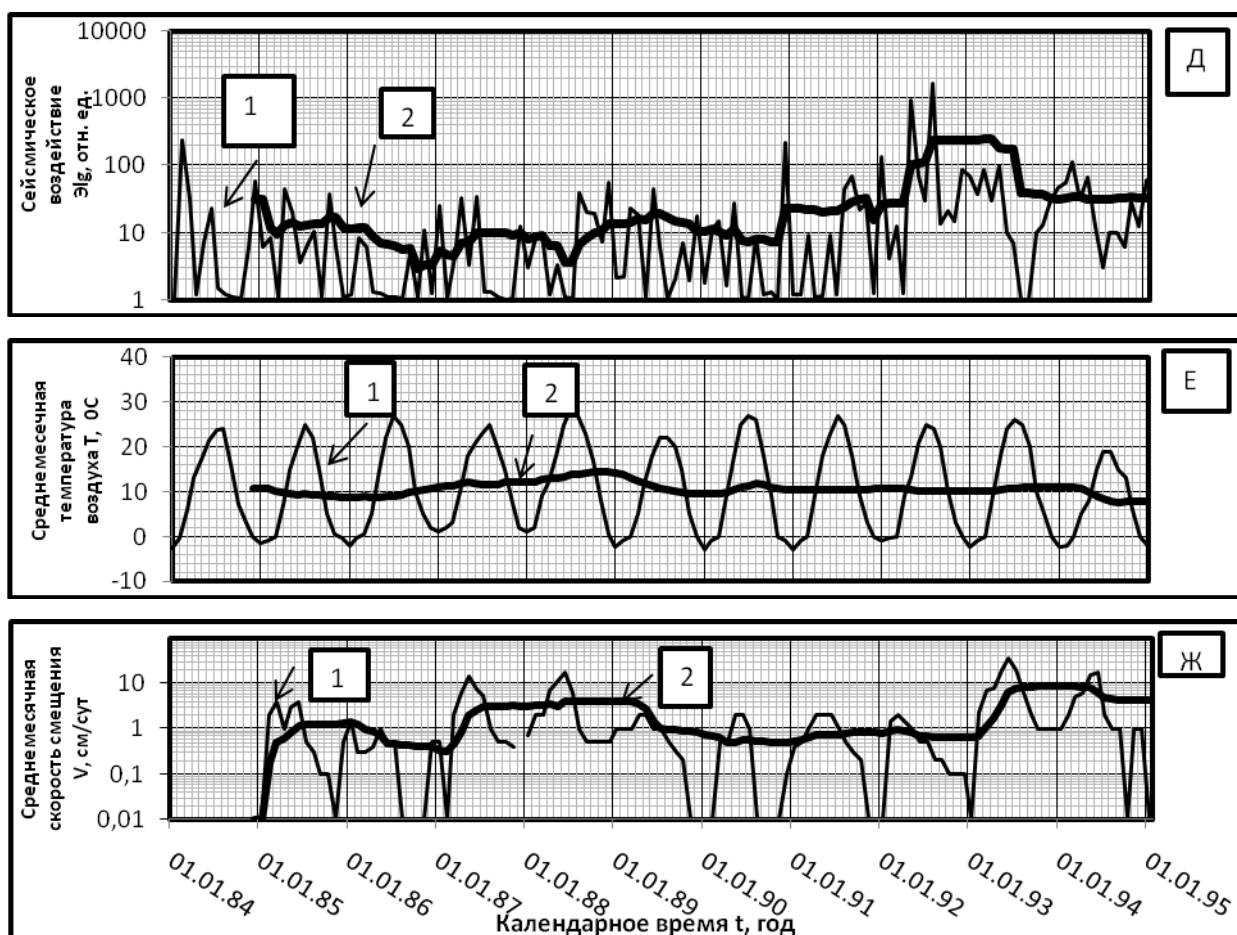


Рис.2. Реальные сглаженные в 12-месячном окне данные гидрометеорологических факторов

В эти периоды происходят, по-видимому, перераспределение внутренних напряжений, консолидация более рыхлых движущихся масс и.т.п. Новый цикл смещения начинается со следующего сезона таяния снежного покрова интенсивных весенних осадков. Различные циклы периодического смещения связаны через накопленное смещение, но член, выражающий тренд, и периодический член независимы друг от друга. В одном цикле, чем больше накопленное смещение, тем более неустойчивым будет оползень, а отклик смещение будет большим при одинаковых значениях прочих влияющих факторах, что может быть совершенно необязательно верным при переходе от одного цикла к другому. В данном случае мы рассматривали смещение отдельно каждый год, начиная с начала

года при наибольше уровне грунтовых вод и, как правило, отсутствием снеготаяния.

Таблица.1. Матрица исходных данных для обучения нейросетевого автомата (фрагмент)

#	t	C1t мм	C2t мм	C3t см	C5t см	C6t °C	C7t °C	C8t мм	C4 см	C9 год ¹	ΔS_{t-1}
1	01.09.1984	0	46	560	20	24	23.1	0	620	305.79	0
2	01.10.1984	30	53	580	20	16	21.3	0	620	306.9	0
3	01.11.1984	70	100	621	41	7	15.67	0	320	307.92	0
4	01.12.1984	119	219	627	6	3	8.67	0	620	313.97	0
5	01.01.1985	40	229	558	-69	0	3.33	0	558	372.62	0
6	01.02.1985	38	197	582	24	-1.5	0.5	0	558	377.57	1.833
7	01.03.1985	78	156	552	30	-1	-0.834	2	558	145.54	5.333
8	01.04.1985	82	198	422	130	0	-0.834	6	558	115.92	5.75
9	01.05.1985	53	213	370	-52	7	2	7	558	158.09	7.917
10	01.06.1985	95	230	370	0	15	7.33	10	558	170.94	10.75

Таблица.2.Корреляционная матрица факторов

	Средние	Ст.откл.	C _{1t}	C _{2t}	C _{3t}	C _{5t}	C _{6t}	C _{7t}	C _{8t}	C ₄	C ₉	ΔI
C _{1t}	43.3619	38.8270	1.000000	0.650142	0.019846	-0.374975	-0.468377	-0.515430	-0.035994	-0.024177	-0.054829	0.155395
C _{2t}	127.4786	76.1724	0.650142	1.000000	-0.267452	-0.536626	-0.360827	-0.615736	0.074584	0.015972	-0.067012	0.100399
C _{3t}	543.6239	95.0916	0.019846	-0.267452	1.000000	0.221357	-0.457237	-0.150029	-0.193420	0.123450	-0.017169	-0.153423
C _{5t}	1.1282	50.0284	-0.374975	-0.536626	0.221357	1.000000	0.334283	0.571817	-0.074657	-0.110270	-0.040114	-0.139802
C _{6t}	10.5299	10.1107	-0.468377	-0.360827	-0.457237	0.334283	1.000000	0.863110	-0.048261	0.088212	-0.006165	-0.086627
C _{7t}	10.7643	9.1543	-0.515430	-0.615736	-0.150029	0.571817	0.863110	1.000000	-0.094079	0.027599	-0.015178	-0.116173
C _{8t}	65.8103	460.9078	-0.035994	0.074584	-0.193420	-0.074657	-0.048261	-0.094079	1.000000	-0.111373	-0.047343	0.006115
C ₄	619.9573	44.0338	-0.024177	0.015972	0.123450	-0.110270	0.088212	0.027599	-0.111373	1.000000	0.079384	-0.103669
C ₉	464.2614	806.8412	-0.054829	-0.067012	-0.017169	-0.040114	-0.006165	-0.015178	-0.047343	0.079384	1.000000	-0.039276
ΔI	54.1652	461.4373	0.155395	0.100399	-0.153423	-0.139802	-0.086627	-0.116173	0.006115	-0.103669	-0.039276	1.000000

Нейросетевая модель с алгоритмом обратного распространения ошибок была обучена на поиск зависимости между исходными данными (9 предикторов) и результатом-периодической составляющей многолетнего смещения A_t . Результаты обучения представлены в табл.(3и 4) и на рис.(4-7). Среднеквадратичная итоговая ошибка обучения составила 2,388 см после обучения сети 1000 раз, после чего нейронная сеть использовалась для прогноза периодического смещения в интервале с 1 января по 1 декабря 1994 года рис. (8).

Обсуждая результаты прогноза можно заметить следующее. Максимальное прогнозное и действительное значение смещения довольно хорошо совпадают с относительной погрешностью 13,5 %. Спрогнозированное значение смещения на всем интервале прогноза отражает общий характер измеренного смещения, но абсолютные их значения существенно меньше действительных: среднее отклонение составляет 18 см при среднеквадратичном значении $\sigma = 17$ см. На рис.8. – приведены графики действительных и прогнозных значений

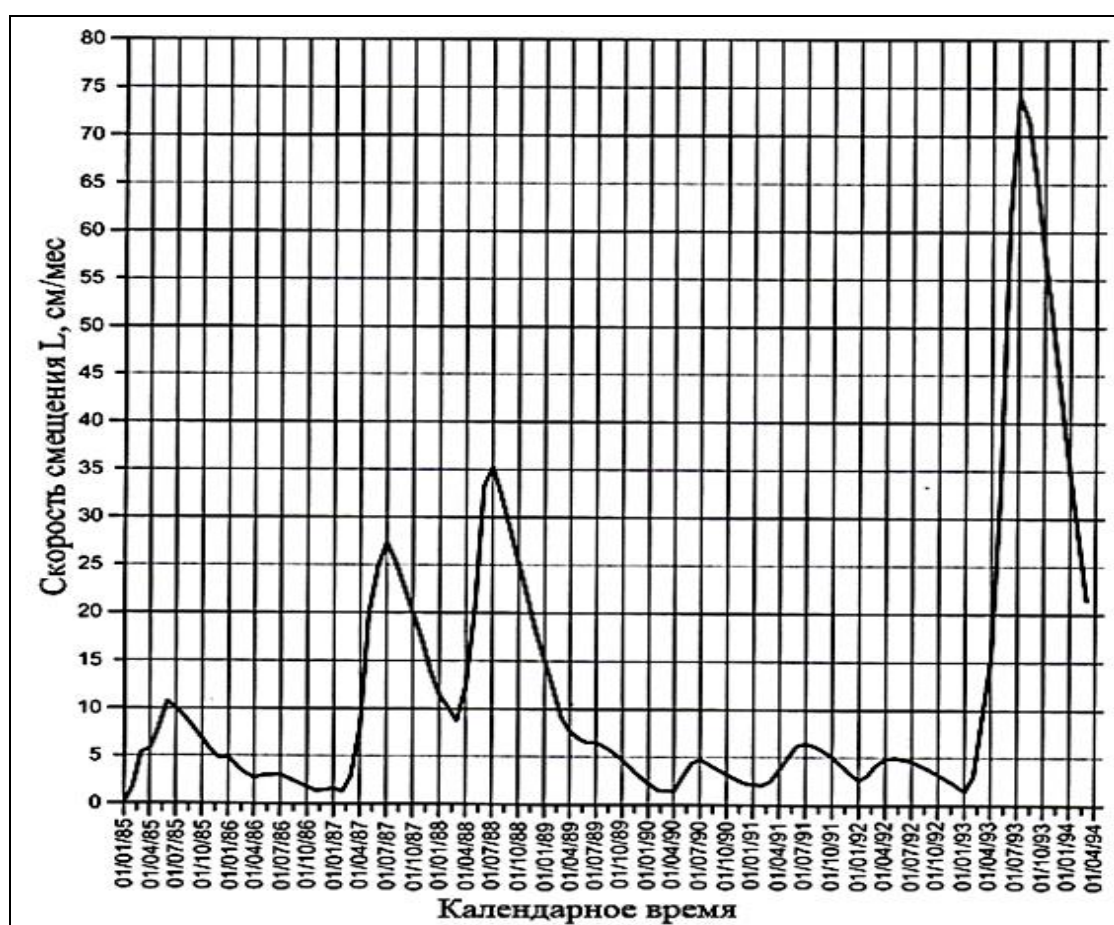


Рис.3. График периодической составляющей смещения оползня №77 на участке Сары-Бээ в период с 1985 по 1993 год, использованный для обучения нейросети.

Таблица.3. Итоговые статистики нейросетиMLP 9-4-1

Статистики предсказ. значений (2013-04-04.sta) Целевая: ΔI Включенные наблюдения: 1:101	
	9.MLP 9-4-1
Минимум предсказ. знач. (Обучающая)	-0,65939
Максимум предсказ. знач. (Обучающая)	33,89061
Минимум предсказ. знач. (Контрольная)	3,02644
Максимум предсказ. знач. (Контрольная)	19,60267
Минимум предсказ. знач. (Тестовая)	2,27791
Максимум предсказ. знач. (Тестовая)	34,35382
Минимум остатков (Обучающая)	-5,68938
Максимум остатков (Обучающая)	8,78478
Минимум остатков (Контрольная)	-2,30263
Максимум остатков (Контрольная)	1,82196
Минимум остатков (Тестовая)	-2,99397
Максимум остатков (Тестовая)	2,05239
Минимум стандар. остатков (Обучающая)	-3,25246
Максимум стандар. остатков (Обучающая)	5,02201
Минимум стандар. остатков (Контрольная)	-2,24980
Максимум стандар. остатков (Контрольная)	1,78015
Минимум стандар. остатков (Тестовая)	-2,43712
Максимум стандар. остатков (Тестовая)	1,67067

Коэффициенты корреляции (2013-04-04.sta) Включенные наблюдения: 1:101			
	ΔI - Обучающая	ΔI - Тестовая	ΔI - Тестовая
9.MLP 9-4-1	0,948390	0,963854	0,992355

смещения оползня (его периодической составляющей) в период подготовки к основному смещению.

Таблица.4. Анализ чувствительности нейросети к факторам

Чувствительность (2013-04-04.sta) Выборки: Обучающая, Тестовая, Тестовая Включенные наблюдения: 1:101									
	$C_{\Delta I}$	C_{3T}	C_{7T}	C_{6T}	C_{2T}	C_9	C_{1T}	C_{5T}	C_4
9.MLP 9-4-1	7,323227	2,629527	2,320613	1,822255	1,260085	1,062629	1,051871	1,048080	1,016298

Данные наблюдения двух типичные для ЮЗТ оползней в Майлуу-Суу показали ступенчатый характер смещения и чередование ускорения и замедления движения, которые обусловлены совместным воздействием осадков и колебанием уровня подземных вод.

С использованием моделей временного ряда смещение было разделено на составляющую: отражающую тренд, и периодическую составляющую. Хороший прогноз периодического смещения был важен для обеспечения точного прогноза общего смещения в плоскости сброса. Такой прогноз должен быть основан на анализе

механизма деформации и доминирующих влияющих факторов. Использование многомерного нейросетевого алгоритма, предварительно обученного на материале мониторинга смещения оползня и влияющих факторах, позволяет дать удовлетворительный прогноз смещения оползня на предстоящий год. Анализ показал что недостаточно было изучить смещение только на основе фактических его значений от времени; необходимо было установить соотношение между смещением и каждым влияющим фактором и рассмотреть доминирующее влияние периодического изменения инфильтрирующих факторов (осадки и подземные воды) на периодическое смещение.

В каждом случае для анализа смещения была выбрана типичная контрольная точка на оползне в головной его части. Одиночная точка (репер) недостаточна для описания характеристик деформации всего оползня. Для достижения всестороннего и более точного прогноза и дальнейшей оценки предлагаемой прогнозной модели, необходимо проанализировать характеристики деформации и тренд смещения в нескольких контрольных точках в различных частях оползневого тела; они должны быть сравнены с результатами модели.

Многолетние наблюдения за смещением оползней в Майлуу-Суу позволил установить одну важную особенность этого процесса. В разные годы в различных частях оползня может наблюдаться неодинаковая величина смещения оползающей массы: в иные годы-в головной части, в другие – в средней части, иногда в одном крыле оползня, иногда вдругом. Среднегодовые скорости могут различаться в 5 раз по различным измерительным створам и реперам. Подобные оползни, зарождаясь в начале как блоковые, в силу слабой спорадической подпитки плоскости скольжения грунтовыми водами, значительной вариации годовой (около 30%) и месячной нормы осадков (более 50%), когда несколько лет подряд (от 3 до 5) могут

быть засушливыми, в последующем демонстрируют нестационарный, скорее импульсный внутрисезонный характер, периоды повышенной и слабой активности в многолетнем разрезе.



Рис.4. График периодической составляющей смещения оползня №77 на участке Сары-Бээ в период с 1985 по 1992 год, и результаты обучения нейросети.

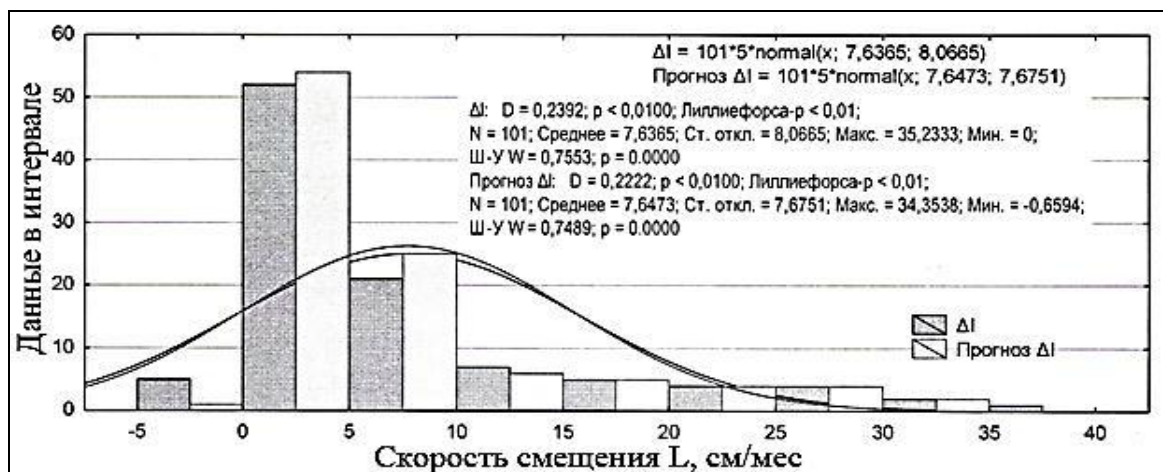


Рис.5. Распределения помесечных скоростей смещения оползня №77 на участке Сары-Бээ с 1985 по 1992 год и прогнозных значений по результатам обучения нейросети

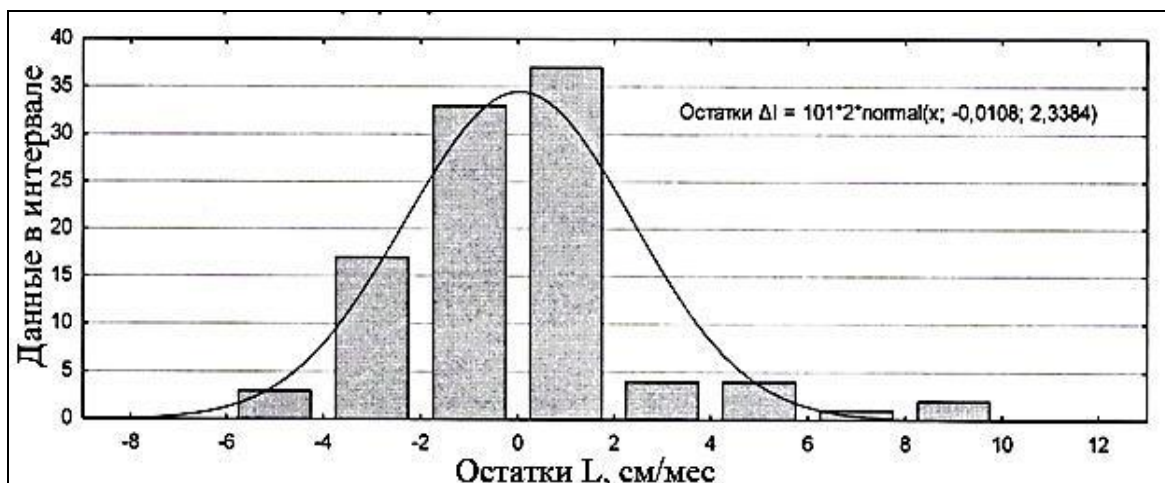


Рис.6. Распределение остатков между действительными и прогнозируемыми показателями месячных скоростей смещения оползня №77 на участке Сары-Бээ с 1985 по 1992 год и прогнозных значений по результатам обучения нейросети

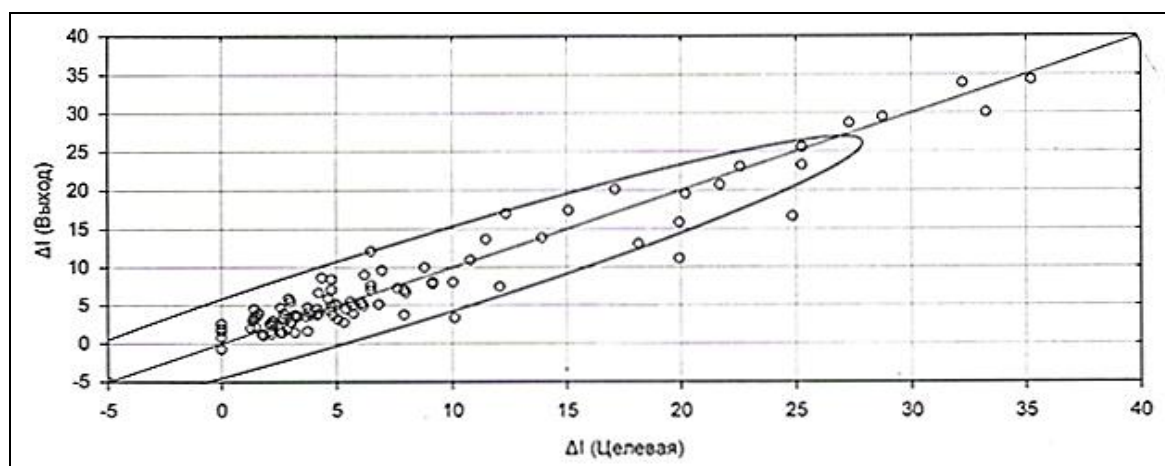


Рис.7. Корреляционная взаимосвязь наблюдаемых (целевая Δl) и прогнозируемых (выходов Δl) значений месячных скоростей смещения оползня №77 на участке Сары-Бээ с 1985 по 1992 год.

В результате оползневые блоки постепенно дезинтегрируются, превращаясь на отдельных участках в деляпсиную массу; натечные формы характерны для низовых частей оползня.

Активность смещения постепенно перемещается в низовую (языковую) часть оползня по мере ее пригрузки наползающими

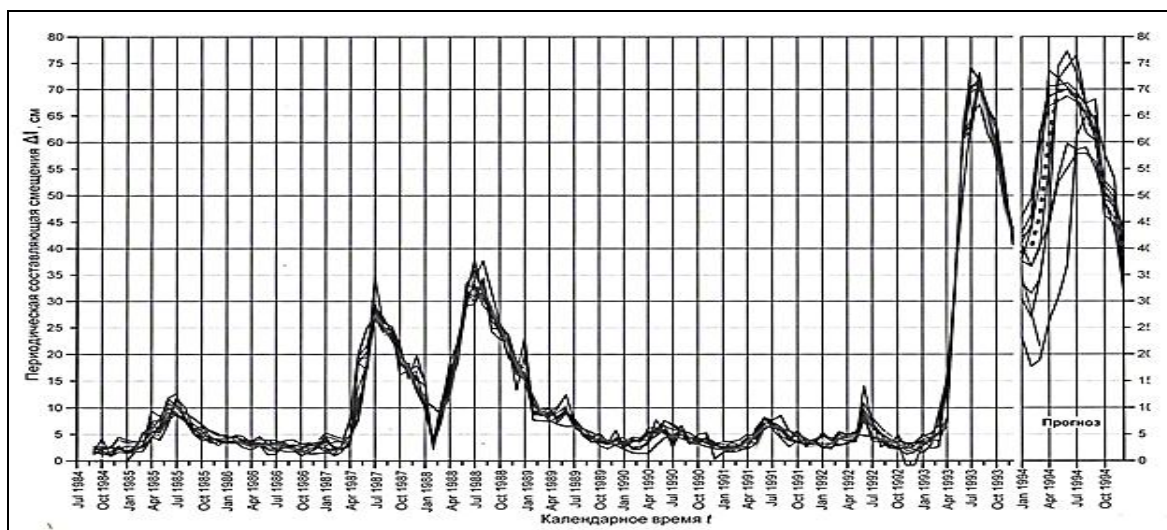


Рис.8. График периодической составляющей помесечных скоростей смещения оползня №77 на участке Сары-Бээ по данным геоконтроля с 1985 по 1993 год (прогнозные кривые на этапе обучения нейросети) и прогноз по тестовой подвыборке на 1994 год по результатам функционирования десяти лучших сетей.

оползневыми массами и лишь спустя некоторое время (исчисляемое по-видимому несколькими годами, в основном маловодными, засушливыми) начинает проявлять активность верховая часть оползня на участке стенки отрыва. При этом движение происходит в виде быстрых смещений во влажное время года, как правило два-три года подряд, или медленного многолетнего смещения верховой части оползня. Подобный “рванный” нестационарный режим развития оползневой массы затрудняет прогноз кинематических параметров активной стадии смещения. Как показали наши эксперименты по нейросетевому моделированию, даже наиболее совершенные нейросетевые автоматы обученные на многолетних ретроспективных данных оползневой активности, метеорологической и гидрогеологической обстановки, способны прогнозировать оползневую активность на предстоящий год в широком диапазоне ошибок прогноза, иногда завышая или занижая прогнозную скорость смещения относительно действительной в 1,5-2 раза (рис.8), несмотря

на довольно хорошие показатели обучения (рис.4-7.), когда коэффициенты корреляции между исходными показателями скорости смещения и прогнозными нейросети достигают значений 0,97...0,995 для любого типа выборок – обучающей, контрольной и тестовой. Качество прогноза может быть улучшено путем вовлечения в прогнозную процедуру данных текущего момента, т.е. перманентного переобучения нейросетевого автомата после получения последних данных и формирования прогноза на 1-2 шаг вперед. При этом необходимо усреднять прогнозные результаты для нескольких лучших из ~10000 предварительно обученных сетей.

В следующей работе авторы на этом же примере намерены представить анализ и результаты прогнозирования с использованием составляющей тренда развития оползневого процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Du Y., Lacasse S. Displacement prediction in colluvial landslides// Landslides. Original papper. 2012.
2. Gruden D.M., Masumzadeh S. Accelerating creep of the slopes of a coal mine//Rock Mech. Eng. 1987. №20. P. 123-135.
3. Kawamura K. Methodology for landslide prediction//Proceeding of 11 th international conference on soil mechanics und foundation engineering. San-Francisco. 1985 p. 1155-1158.
4. Li T., Chen M., Wang L., Zhou Y. Time prediction of landslide using Verhulst inverse function model//Proceeding 7th Jnt. Symp. On Landslides. Trondheim. 1996. V2. P. 1289-1293
5. Mayoraz F., Vulliet L. Neural networks for slope movement prediction// Jnt. J. Geomech. 2002. №2. P. 153-173.
6. Алешин Ю.Г. Алгоритмизация оползневого прогнозирования на основе нейросетевого моделирования// Известия НАН КР 2010. №2. С. 19-27.
7. Васильев В.И. Распознающие системы. Киев: Наукова думка. 1983. 422с.

УДК 532.546

**МОДЕЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ
СОЛЕПЕРЕНОСА В ПОЧВОГРУНТАХ**

А.И. Бийбосунов, Р.Табышов

ИФН КНУ им. Ж.Баласагына

Вопросы тепло-влажнопереноса в почвах, грунтах являются фундаментальными при решении многих задач гидрологии, агрофизики, гляциологии, экологии, и других областей науки. Сложное взаимодействие потоков тепла в почво-грунтах и снежном покрове обуславливает протекание процессов инфильтрации, миграции и морозного пучения, испарения и транспирации, метоморфизма и снеготаяния.

Водный и тепловой режимы почв и снега в зимний и весенний периоды в значительной степени определяют характеристики весеннего половодья. Развитие методов прогноза этого довольно опасного явления природы не мыслимо без глубоких исследований процессов снеготаяния и поглощения талых вод речными бассейнами.

Процессы тепло-влажнопереноса определяют дождевой сток и испарение. Эти составляющие являются основными в структуре водного баланса больших и малых территорий и тесно связаны с водохозяйственной деятельностью и проблемами гидрологических расчетов.

Вопросы теплового и водного режима корнеобитаемого слоя почвы, процессов испарения и транспирации имеют важное значения

для сельского хозяйства. Данные процессы определяют условия перезимовки и произрастания сельскохозяйственных культур. Велика роль миграции и инфильтрации влаги в формировании продуктивных запасов влаги на сельскохозяйственных полях.

Для решения всех этих важных народнохозяйственных задач необходимы надежные методы расчета водного и теплового режима почвогрунтов и снежного покрова учитывающие динамику естественных природных процессов в течение года и действие антропогенных факторов.

Достоверность решения задач по прогнозированию солевого режима почвогрунтов в значительной степени зависит от точности определения параметров солепереноса. Важное значение здесь имеет также выбор математической модели солепереноса, дающей удовлетворительное описание изучаемых явлений. Использование грубых представлений может привести к неконтролируемым ошибкам, что отрицательно скажется на качестве прогноза солевого режима орошаемых массивов. Поэтому установление параметров солепереноса имеет чрезвычайно важное значение и является одной из важнейших задач экспериментально-теоретических исследований. Указанные параметры должны определяться по результатам специальных полевых (промывка опытных чеков и площадок) и лабораторных экспериментов (промывка монолитов ненарушенной структуры). Их нахождение сводится к решению обратной задачи солепереноса. Подробно описаны методы [1, 3] решения подобных задач, когда искомые параметры модели солепереноса находятся, по данным засоленности, в отдельных точках расчетной толщи почвогрунта в фиксированный момент времени. Более надежными являются интегральные методы, когда при нахождении параметров используются экспериментальные данные о процессе за определенный промежуток времени в некоторых точках пористой

среды или информация во всей рассматриваемой области пространства на определенном отрезке времени. Однако на практике получить информацию о процессе в таком объеме не всегда возможно из-за сложности, трудоемкости и высокой стоимости соответствующего эксперимента. В результате исследований по данной тематике выяснилось, что существующие методы определения параметров [2], особенно для условий нестационарного режима, разработаны недостаточно. В существующих публикациях было доказано, что необходимо разработать методы для определения параметров модели солепереноса по среднему засолению промываемой толщи почвогрунтов до и после промывки, которые являются более точными. Обоснование этих методов в основном заключается в том, что средние значения распределения солей в толще, представляющие собой интегральные величины, определяются с большой точностью и являются более информативными, чем содержание солей в какой-либо точке почвы. Предлагаемый метод определения параметров солепереноса в условиях стационарного водно-солевого режима почвогрунтов, по данным как полевых, так и лабораторных экспериментов, учитывает изложенные выше особенности. Цель исследования – изучить стационарное распределение легкорастворимых солей в почве и грунтах зоны аэрации на основе математического моделирования.

Для реализации цели были поставлены конкретные задачи:

- изучение миграции солей под действием инфильтрации и испарения с поверхности грунтовых вод при отсутствии и наличии транспирации;
- разработка методов расчета гидрохимического параметра дисперсии на основе натурных наблюдений за процессом распределения легкорастворимых солей под действием инфильтрации и испарения;
- апробация полученных решений при сравнении прогнозных данных с фактическими.

Известно, что стационарный солевой и водный режимы формируются при длительном орошении или в естественных условиях и наступают при равновесии факторов, способствующих выносу солей из пород зоны аэрации и грунтовых вод и поступлению солей. В связи с этим будем рассматривать также некоторые вопросы моделирования переноса солей в условиях стационарного режима, когда можно пренебречь сезонными отклонениями от общего направления процесса, т.е. можно пренебречь изменениями во времени количества солей (эпюры распределения солей в пространстве) в рассматриваемой области фильтрации. Одной из основных задач исследований солепереноса следует считать выбор соответствующей данным условиям математической модели на основе изучения: а) структурных особенностей отдельных горизонтов изучаемой толщи пород (почв, грунтов, зоны аэрации грунтовых вод), б) закономерностей передвижения веществ, в) процессов, принимаемых во внимание, г) способов описания действия этих процессов.

Успех прогнозирования процессов солепереноса в почвах с помощью математического моделирования в каждом конкретном случае зависит от разумного выбора модели. Этот выбор определяется свойствами почв, характером водных режимов и точностью входной информации. Стационарный процесс перераспределения легкорастворимых и подвижных солей в почвах при малом содержании их в твердой фазе и постоянной скорости движения влаги в зоне аэрации во времени описывается распространенным уравнением диффузии, где C учитывается концентрация солей почвенного раствора на глубине x , г/л или %.

Выводы. Разработан метод определения параметров солепереноса в условиях стационарного солевого режима почвогрунтов зоны аэрации по среднему засолению почв заданной

мощности, до и после полива, по данным полевых экспериментов. На основе решения модели солепереноса, описывающей процесс в условиях стационарного водно-солевого режима почвогрунтов зоны аэрации, возможно определение параметра конвективной диффузии по среднему засолению почвы как при отсутствии, так и при наличии транспирации. Основным преимуществом метода является облегчение вычислительной процедуры и достоверность значений параметра конвективной диффузии, так как не используется в расчетах трудно определяемая в мелиоративной практике исходная информация о содержании солей на поверхности почвы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверьянов С.Ф. Борьба с засолением орошаемых земель. М.: Колос, 1978. 288 с.
2. Айдаров И.П. К вопросу обоснования режима орошения и параметров дренажа на засоленных или склонных к засолению землях // Теория и практика борьбы с засолением орошаемых земель / Под. ред. С.Ф. Аверьянова. М.: Колос, 1971. С. 71-81.
3. Ковда В.А. Происхождение и режим засоления почв. М.: т.1-2, 1946-47 гг.

УДК 622.391. 821

**ВЛИЯНИЕ ТРЕЩИНЫ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ
НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ВЫРАБОТКИ В ОПТИЧЕСКИ
АКТИВНОЙ МОДЕЛИ**

Г.О.Казакбаева

ИГиОН НАН КР

При образовании в массиве горных выработок вокруг них происходит перераспределение первоначальных напряжений, которые имели место до их образования. Известно, что напряжения в различных местах выработки распределяются неодинаково. Устойчивость горной выработки определяется величиной и характером распределения напряжений в прилегающем массиве, которые, в свою очередь, зависят от глубины расположения выработки, формы ее поперечного сечения, наличия близко расположенных смежных выработок, физико-механических свойств боковых пород, окружающих выработку, и т.д.

Сложность изучения особенностей распределения напряжений вокруг выработок различного назначения обуславливает необходимость моделирования напряженно-деформированного состояния с учетом различных факторов. При теоретическом определении величин напряжений и характера их распределения вокруг выработок во многих случаях используются модели, в которых среда представляет собой однородный изотропный и сплошной материал. Однако в действительности природная характеристика

горного массива существенно отличается от теоретических моделей.

Массив состоит из различных пород с разными физико-механическими свойствами. Некоторые факторы, существующие в массиве пород, обуславливают пространственно-неоднородное распределение полей напряжений вокруг выработок. Задачи, связанные с устойчивостью выработок с учетом отдельных факторов, приводящие к неоднородному распределению напряжений в массиве горных пород, решены многими авторами поляризационно-оптическим методом и приведены во многих трудах, в частности, в /1-6/.

Среди факторов, приводящих к неоднородному распределению напряжений в массиве горных пород, особое место занимают остаточные напряжения и трещиноватость. При расчете устойчивости горных выработок влияние отмеченных факторов на распределение напряжений окружающих его пород изучено недостаточно. В связи с этим, в данной работе проведено исследование характера распределения остаточных напряжений вокруг выработки поляризационно-оптическим методом. Рассматриваются два варианта.

1. Характер распределения остаточных напряжений вблизи выработки в плоской оптически активной сплошной модели.
2. Характер перераспределения остаточных напряжений вблизи выработки в плоской оптически активной модели с учетом влияния горизонтальной трещины, расположенной в правом боку выработки.

Для исследования использована оптически активная плоская модель толщиной 8 мм, изготовленная из эпоксидной смолы ЭД-6 по известной технологии /7/. В плоской модели с выработкой температурным режимом созданы поля остаточных напряжений. Определены величины главных напряжений вблизи выработки по методике, изложенной в работах /7-8/, а также установлен их характер распределения.

Распределение напряжений вокруг выработки в сплошной плоской оптически активной модели.

Из картин изохром в плоской сплошной модели видно, что более высокая концентрация напряжений имеет место в боковых и угловых частях выработки (рис.1).

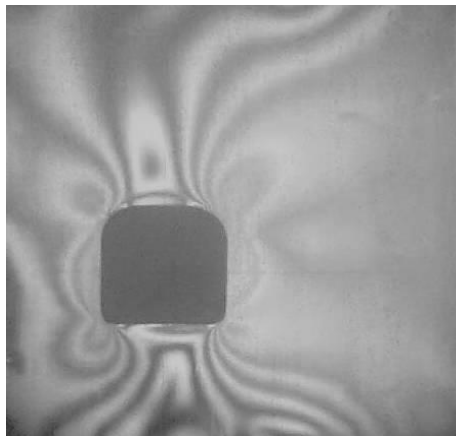


Рис. 1. Картина изохром полей остаточных напряжений вокруг выработки в сплошной модели.

В наших исследованиях величины остаточных напряжений определены по основным направлениям: над кровлей, по горизонтальному сечению в правом, левом боках и в днище выработки. В настоящей работе приведены результаты эксперимента в виде эпюр главных напряжений по вертикальному сечению над кровлей и по горизонтальному сечению в правой боковой части выработки.

Из эпюр главных нормальных напряжений видно, что по вертикальному сечению над выработкой нормальное напряжение σ_1 имеет знакопеременный характер распределения с преобладанием высоких растягивающих напряжений вблизи кровли, достигающих до 3-3,5 МПа. Удаляясь от контура выработки, растягивающие напряжения снижаясь переходят в сжимающие напряжения. Второе главное нормальное напряжение σ_2 в этом направлении имеет только

сжимающие значения. Вблизи контура выработки величины сжимающих напряжений незначительны, но в удалении от контура, достигают более высоких величин (6 МПа). Характер распределения сжимающих напряжений имеет сравнительно спокойный вид распределения (рис.2а). Величины максимальных касательных напряжений по данному сечению достигают от 1,5 до 1,9 МПа. Характер распределения $\tau_{\max}$ имеет неоднородный вид вблизи и в удалении от выработки (рис. 2б).

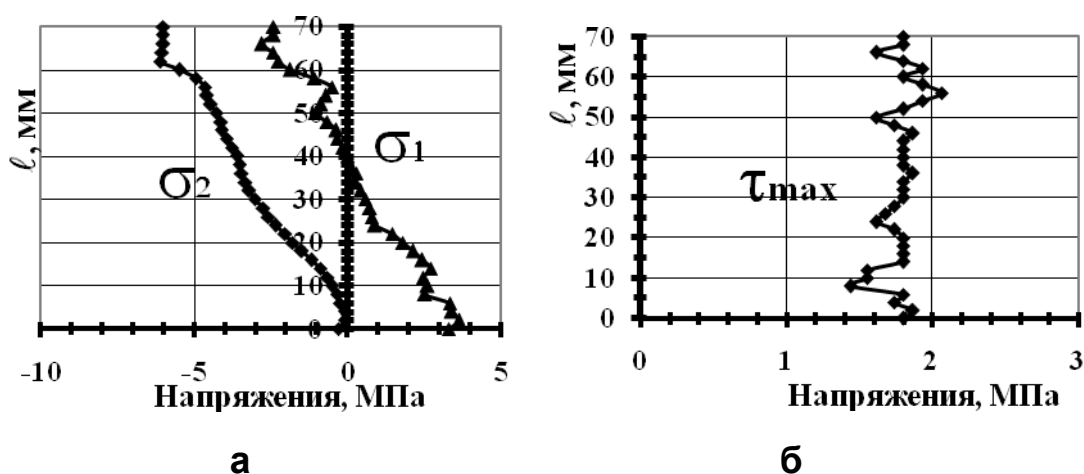


Рис. 2 . Эпюры главных напряжений в сплошной модельной пластине по вертикальному сечению над кровлей выработки.

По горизонтальному сечению с правой стороны выработки одно из главных нормальных напряжений σ_1 имеет незначительные растягивающие значения. Второе нормальное напряжение σ_2 в данном направлении имеет сжимающие значения, максимальные величины которых не превышают 4 МПа. По характеру распределения остаточные напряжения имеют спокойный вид (рис.3а). Величины максимальных касательных напряжений по этому сечению в отдельных точках достигают до 2 МПа. Характер распределения имеет спокойный вид (рис.3б).

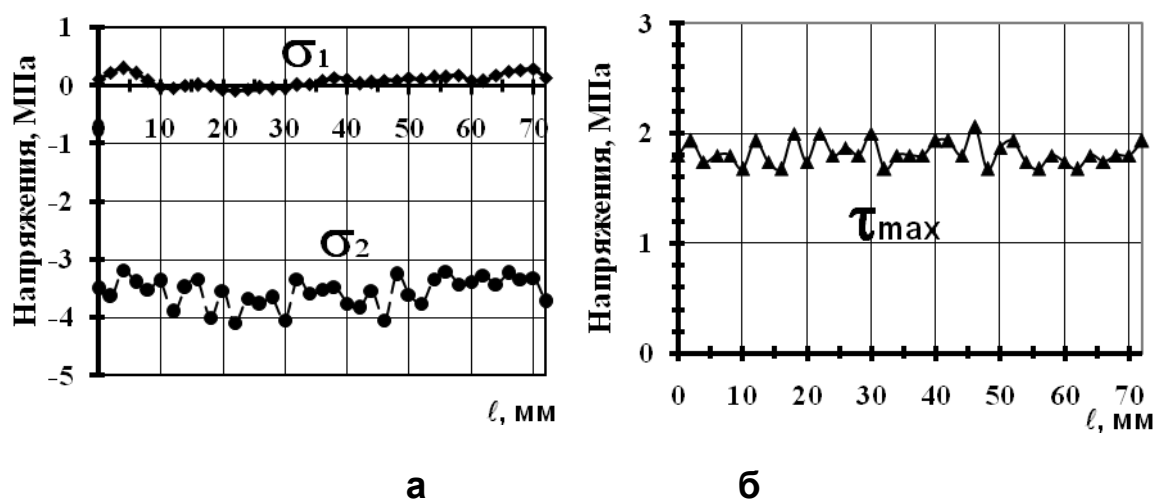


Рис.3. Эпюры главных напряжений в сплошной модельной пластине по горизонтальному сечению с правой стороны выработки.

Распределение напряжений вокруг выработки в плоской оптически активной модели с трещиной.

Каждая трещина в твердом теле ведет к перераспределению начальных напряжений: в одних местах они ослабевают, а в других - усиливаются. В данном варианте мы рассматриваем влияние трещины на характер распределения остаточных напряжений вокруг выработки. Трещина с длиной 4 см расположена справа от выработки. Картина изохром в плоской модели показывает, что трещина привела к снижению концентрации напряжений в угловых частях и вблизи контура с правой стороны выработки (рис.4).

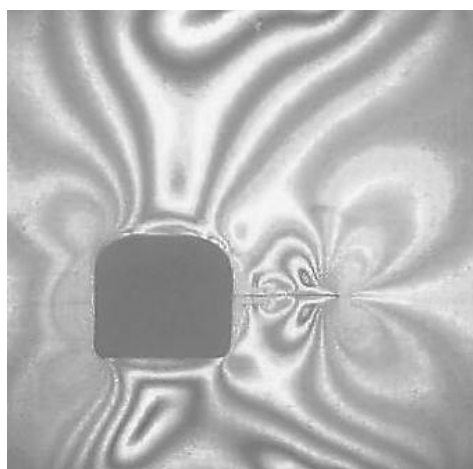


Рис.4. Картина изохром перераспределения остаточных напряжений вокруг выработки с влиянием трещины.

Эпюры главных нормальных напряжений в данном варианте по вертикальному сечению над кровлей выработки показывают, что характер распределения растягивающих напряжений σ_1 по сравнению с первым вариантом значительных изменений не испытывает, но в отдельных точках вблизи контура их величины растут, достигая до 3,9 МПа. Нужно подчеркнуть, что по сравнению с первым вариантом исследований влияние трещины привело к снижению величин сжимающих напряжений σ_1 и σ_2 в удалении от контура выработки (рис.5а-б).

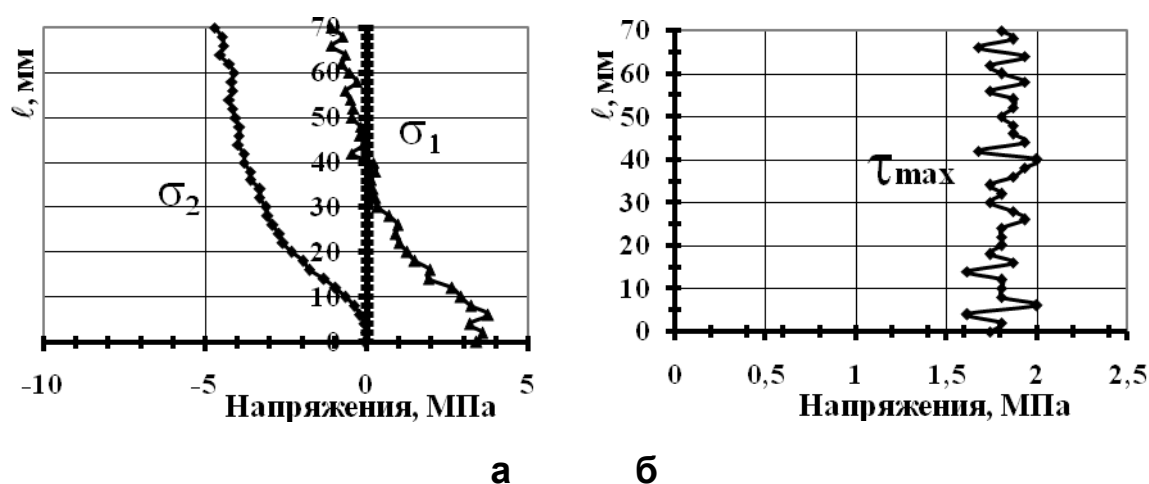


Рис.5. Эпюры главных напряжений по вертикальному сечению над кровлей выработок плоской модели с трещиной.

Трещина привела к следующим перераспределениям остаточных напряжений в правой боковой части выработки по горизонтальному сечению. Из рисунка 6а видно, что наблюдается значительный рост величин растягивающих напряжений σ_1 , которые до конца трещины достигают от 2 до 3,5 МПа. А второе главное напряжение σ_2 около контура выработки имеет сжимающие значения. Далее сжимающие напряжения, меняя знак, переходят в растягивающие напряжения. Высокая концентрация растягивающих напряжений σ_1 и σ_2 имеет место в конце трещины, где их величины достигают до 7 МПа. В удалении от конца трещины наблюдается

снижение величин растягивающих напряжений, и это видно из эпюр, приведенных на рис. 6а. Характер перераспределения главных напряжений с влиянием трещины в правом боку выработки имеет знакопеременный, неравномерный вид (рис.6а-б).

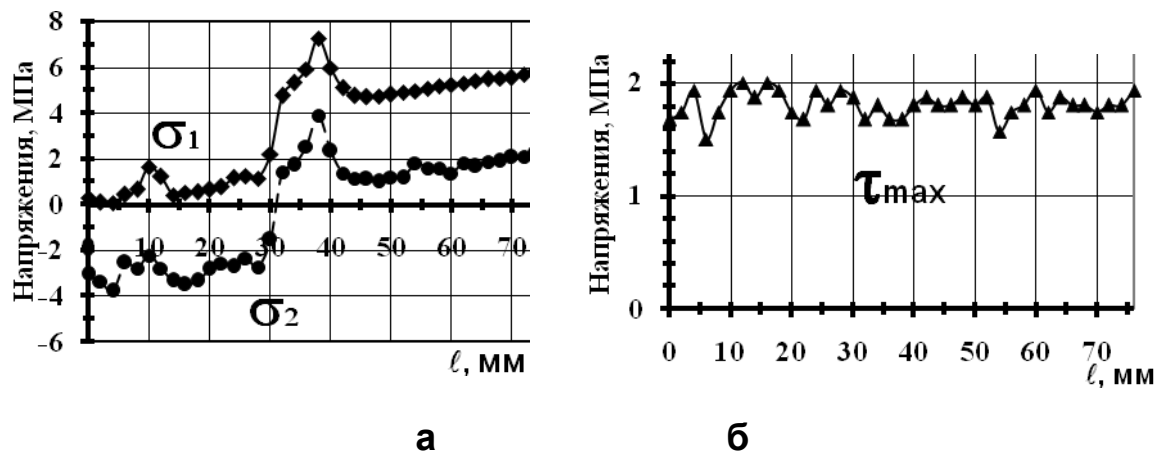


Рис.6. Эпюры главных напряжений на правом боку по горизонтальному сечению выработки в плоской модели с трещиной.

Таким образом, результаты проведенных исследований поляризационно-оптическим методом позволяют сделать следующие выводы.

- Выявлено, что в сплошной модели вблизи кровли выработки по вертикальному сечению и в его днище преобладают растягивающие напряжения, а в удалении от контура имеют место сжимающие напряжения.
- Выявлено, что по горизонтальному сечению в боках выработки в сплошной модельной пластине имеют место высокие сжимающие напряжения с равномерным характером распределения.
- Выявлено, что трещина, расположенная на правом боку выработки повлияла на распределение напряжений вокруг нее, приведя к росту величин растягивающих и к снижению величин сжимающих напряжений вблизи контура выработки.

- Выявлено, что на правом боку вблизи выработки с проведением трещины произошли снижения величин сжимающих напряжений, а вблизи ее конца образовалась зона высоких растягивающих напряжений. Также трещина изменила характер распределения главных остаточных напряжений, приведя к знакопеременному, скачкообразному виду.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ривкин И.Д., Чистяков Е.П. Влияние некоторых горно-геологических факторов на характер напряженного состояния пород и контура выработки // Поляризационно-оптический метод исследования напряжений: Тр. Всесоюз. конф. 23-27 июня. – Л., 1966. – С. 462–466.
2. Трумбачев В.Ф., Молодцова П.С. Применение оптического метода для исследования напряженного состояния пород вокруг горных выработок. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 95 с.
3. Хаимова-Малькова Р.И. Исследование на моделях из оптически активного материала агарина характера разрушения пород вокруг горных выработок. // Поляризационно-оптический метод исследования напряжений: Тр. 5-й Всесоюз. конф. 23-27 июня. – Л., 1966. – С. 481-487.
4. И.Т. Айтматов, Н. Карагулов. Влияние трещин на напряженное состояние пород, окружающих горную выработку. // В сб. Устойчивость горных пород в камерах и подготовительных выработках. Изд. Илим, Фрунзе. 1969. С. 22-32.
5. Айтматов И.Т., Тажибаев К.Т., Казакбаева Г.О. Исследование распределения остаточных и действующих напряжений вокруг выработки в трещиноватой модели поляризационно-оптическим методом // Известия Кыргызского технического университета им. И.Раззакова. Бишкек, 2005. – № 7. – С.10–18.

6. Айтматов И.Т., Тажибаев К.Т., Казакбаева Г.О. Моделирование остаточных напряжений и их взаимодействие с внешними силами вблизи выработки методом фотоупругости // Современные проблемы механики сплошных сред. Гидрогазодинамика и экзогенно-геологические процессы природы / Сб. тр., вып. Третий. – Бишкек, 2004. – С. 6–13.
7. Хаимова-Малькова Р.И. Методика исследования напряжений поляризационно-оптическим методом. – М.: Наука, 1970. – 115 с.
8. Феппл Л., Менх Э. Практика оптического моделирования. – Новосибирск: Наука, Сиб. Отд., 1966. – 211 с.

УДК 622:620.1

**ПРИЛИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНО НЕУСТОЙЧИВЫХ
СКАЛЬНЫХ МАССИВОВ НА УЧАСТКЕ ТОКТОГУЛЬСКОЙ ГЭС**

Манжиков Б.Ц.

ИГОН НАН КР

Безопасность гидротехнических сооружений, возведенных на горных реках, предполагает безусловную устойчивость крутых берегов речных каньонов на весь период их эксплуатации. К сожалению, очень часто прилегающие горные склоны имеют неблагоприятное геомеханическое состояние, которое зависит от множества влияющих факторов, не поддающихся строгому учету, что значительно осложняет контроль и прогнозирование склоновых процессов. Указанная проблема характерна для большинства гидротехнических сооружений, строящихся или функционирующих в сложных инженерно-геологических условиях. Весьма показательным в этом отношении является участок основных сооружений Токтогульской ГЭС на реке Нарын, на котором по данным инженерно-геологических изысканий, выявлено 29 потенциально-неустойчивых скальных массивов с общим объемом 9,2 млн. м³ [1–4]. Самопроизвольное обрушение этих массивов способно нанести ощутимый ущерб инженерным сооружениям и нарушить нормальную работу гидроузла.

На напряженно-деформированное состояние окружающих горных склонов и интенсивность склоновых процессов вблизи ГЭС, оказывают влияние: форма и пространственные характеристики склона, физико-механические свойства и степень нарушенности

слагающих пород, региональная сейсмичность, лунно-солнечные земные приливы, сезонные климатические изменения температуры и атмосферного давления, колебания уровня водохранилища, вибрации технологического оборудования и т.п. Невозможность строгого учета влияния перечисленных факторов на геомеханическое состояние горных склонов делает невозможными или малоэффективными оценку и прогноз состояния их устойчивости аналитическими методами. В подобных условиях особую актуальность приобретают организация и проведение режимных инструментальных наблюдений за потенциально опасными структурными элементами окружающих горных склонов, как единственной экономически оправданной меры по обеспечению безопасной и эффективной эксплуатации гидроузла. Инструментальные данные геомеханического мониторинга, регистрируемые на протяжении достаточно длительного времени, позволяют объективно оценивать поведение и устойчивость такой сложной системы как горный склон, составляя информационную основу прогнозирования склоновых процессов.

Со временем постепенная деградация крутых горных склонов вследствие нарушения связей между структурными элементами, способствует повышению их мобильности (подвижности), потере устойчивости и развитию опасных склоновых процессов. На участке Токтогульского гидроузла эти негативные явления достаточно распространены вследствие блочной структуры, тектонической нарушенности и высокой трещиноватости грубо слоистых мраморизованных битуминозных известняков нижнего карбона, слагающих береговые устои и основание сооружения [5, 6]. Благодаря регулярно повторяющимся приливным деформациям мобильность породного массива выявляется по результатам геомеханического мониторинга.

В настоящей работе особенности деформационной реакции дискретной геосреды на приливные воздействия со стороны Луны и Солнца рассмотрены с целью оценки мобильности потенциально неустойчивых массивов левобережного и правобережного примыканий Токтогульской плотины. Принципиальная возможность такой оценки обеспечивается высокой воспроизводимостью тестового приливного воздействия, поддающемуся точному расчету для любой точки земной поверхности в произвольный момент времени [7, 8]. С этой целью показатели приливной мобильности породного массива в зонах влияния крупных трещин бортового отпора 995 и 69 левобережного примыкания плотины сопоставляются с аналогичными величинами, рассчитанными для передовой части массива 59-1 правобережного примыкания, полностью отчлененной от основной скалы. Информационную базу исследований составили результаты многолетних наблюдений склонового процесса в указанных участках створа Токтогульской ГЭС с помощью автоматизированных гидростатических нивелиров RJ-50 фирмы NARI KHP [9]. Точность измерений вертикальных движений составляла 0.01 мм, частота дискретизации эквидистантных цифровых данных 1 час^{-1} .

Статистическая обработка исходных данных, представленных результатами измерений по каждому из участков, включала:

- формирование частичных реализаций длительностью не менее 3 лет, не содержащих больших пропусков данных, способных значительно исказить результаты оценки;
- «отбеливание» выделенных данных путем удаления квазистатической составляющей, вычисляемой в скользящем 36 – часовом временном окне, что с некоторым запасом превышает период наиболее интенсивной суточной приливной волны;

- вычисление спектральной плотности мощности вертикальных движений по результатам 1024 точечного преобразования Фурье отбеленных данных;
- выполнение Фурье преобразования для хронологически последовательных выборок отбеленных данных в скользящем 168 – часовом окне (7 суток) со сдвигом 24 часа;
- построение временных контурных диаграмм изолиний спектральной плотности вертикальных движений.

Выделенные реализации данных вертикальных движений, левый столбец, и их спектральная плотность, правый столбец, по каждому из участков показаны на рисунке 1. На графиках вертикальной составляющей точками обозначены показания автоматизированных гидронивелиров, серой линией средние выборочные значения, вычисленные в скользящем временном окне.

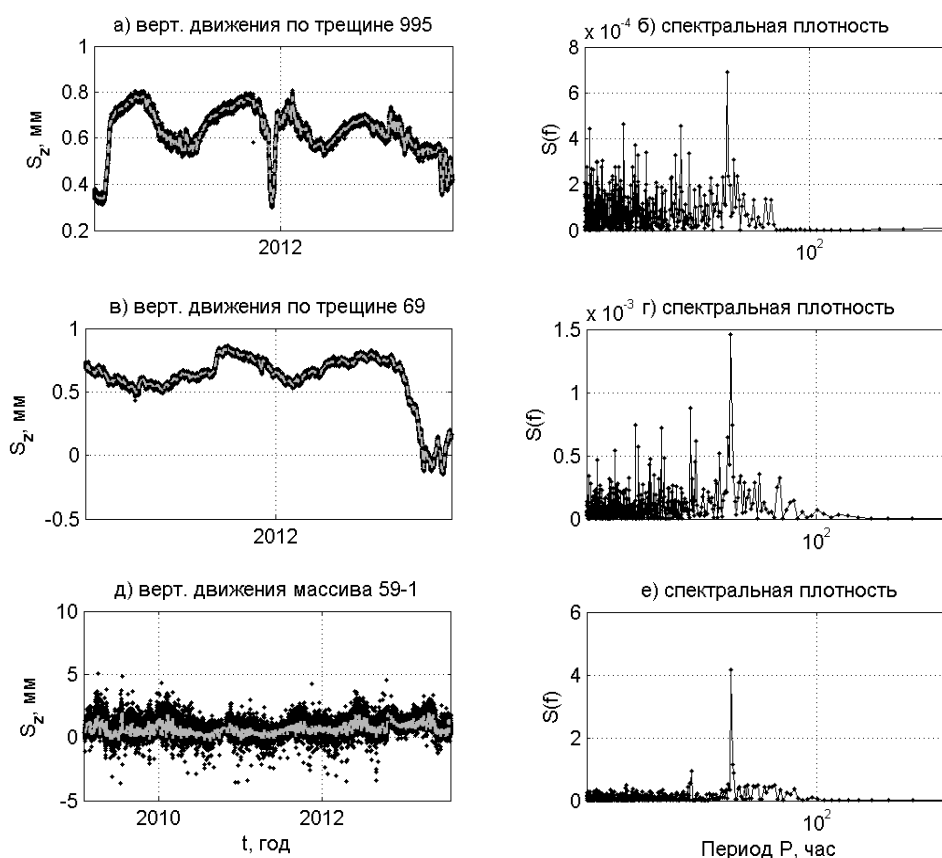


Рис. 1. Вертикальные движения структурных элементов потенциально неустойчивых массивов и их спектральная плотность: а), б) по трещине 995; в), г) по трещине 69; д), е) передовой блок №3 массива 59-1

Согласно представленным данным, в 2011–2013 году вариации вертикальных смещений породных блоков в зонах влияния крупных структурных нарушений левобережного примыкания плотины, обусловленные изменениями напряженно-деформированного состояния левобережного скального массива и термоупругими деформациями бетонной гравитационной плотины, между которыми они находятся, составили десятые доли миллиметра. В то же время сравнительно медленные движения, в пределах 10 мм, передовых блоков правобережного массива 59-1, свободно покоящихся на склоне, происходили, скорее всего, под влиянием климатических факторов и сезонных колебаний уровня водохранилища. Последние, как известно, вызывают изменения крутизны береговых устоев, на которых покоятся передовые блоки потенциально неустойчивого массива.

Исходные инструментальные данные, регистрируемые на каждом из контролируемых участков, имеют заметный статистический разброс и значительную разницу величин вертикальных смещений. Среднее квадратическое отклонение результатов измерений в зонах влияния трещин 995, 69 и передовых блоков массива 59-1 составляет, соответственно, 0,0102, 0,0104 и 0,3501. Поскольку представленные значения получены однотипными приборами, то их разброс, очевидно, характеризует не столько погрешность измерений, сколько степень подвижности контролируемых структурных элементов горных склонов, обусловленную всей совокупности влияющих факторов, перечисленных выше. Судя по величине разброса данных, мобильность передовых блоков массива 59-1, полностью отчлененных от основной скалы, и сохраняющих равновесие лишь благодаря трению и сцеплению в пределах контактных зон, значительно превышает таковую в зонах влияния структурных нарушений

левобережного примыкания, зажатых между береговым массивом и телом плотины.

Несмотря на кажущуюся хаотичность и значительный разброс, исходные данные содержат детерминированные составляющие, в частности, связанные с приливными воздействиями, имеющими период около 12 и 24 часов, которые выявляются по результатам Фурье анализа. На представленных графиках спектральной плотности мощности вертикальных движений, рисунки 1б, г, е, им соответствуют первый и второй спектральные максимумы. Благодаря сравнительно высокой подвижности передового блока №3 массива 59-1, на соответствующем графике спектральной плотности вертикальных движений полусуточная компонента прилива с периодом 12 часов, выражена гораздо сильнее по сравнению со структурными элементами левобережного массива 46-R-7. В среднем спектральная плотность вертикальных движений указанных участков отличается на 3 – 4 порядка.

Следует отметить, что спектральные зависимости на рисунке 1 относятся ко всей выделенной реализации в целом, и характеризуют ее безотносительно ко времени. Вместе с тем, вследствие случайной природы склоновых процессов и сезонного характера большинства влияющих факторов, можно ожидать сезонных особенностей и в проявлении земных приливов. Поэтому, учитывая взаимосвязь мобильности и устойчивости горных склонов, определенный интерес представляло исследование временных вариаций спектральной плотности движений контролируемых участков. С этой целью было рассмотрено изменение спектральной плотности вертикальных движений, вычисляемой в скользящем временном окне длительностью 168 часов (7суток) сдвигом в 1 сутки. Выбранная ширина временного окна обеспечивала необходимую статистическую представительность анализируемой выборки, а сдвиг в 24 часа,

временную детальность анализа исследуемых явлений. В результате обработки данных указанным методом формировались двумерные числовые массивы, в которых номеру столбца соответствовало время (текущая дата), а номеру строки, периода вертикальных движений контролируемого участка. Результаты проведенного анализа в виде изолиний спектральной плотности представлены на рисунке 2.

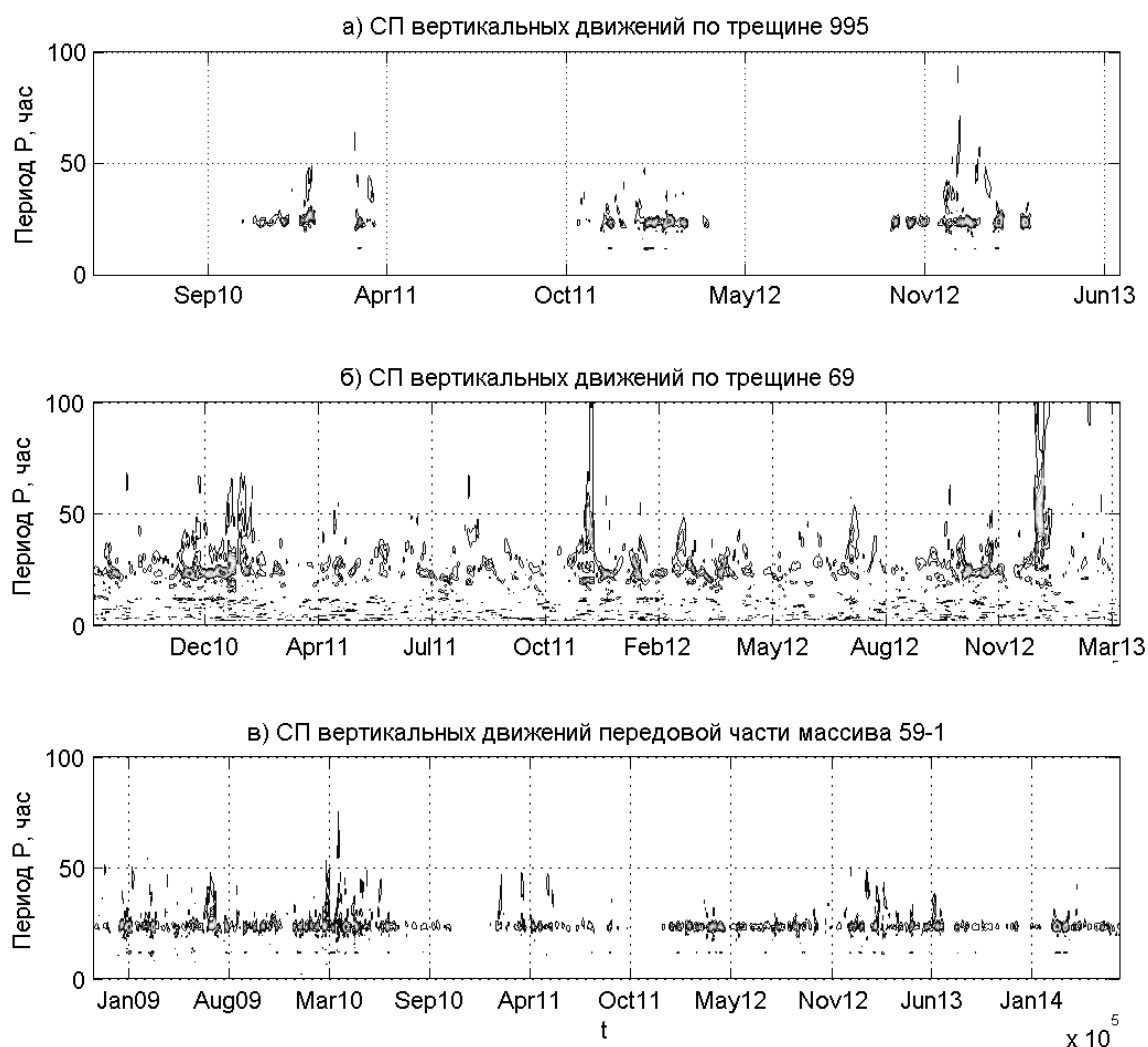


Рисунок 2. Временные распределения спектральной плотности мощности вертикальных движений: а) зона влияния трещины 995, б) зона влияния трещины 69, в) передовая часть массива 50-1

Как следует из приведенных распределений, наибольшая спектральная плотность мощности соответствует суточной приливной волне. Менее интенсивная полусуточная компонента прилива

проявилась на них не столь отчетливо. Представленные распределения оказались весьма неравномерными во времени. Для двух первых из них, относящихся левобережному примыканию, отмечается вполне ожидаемая сезонная зависимость интенсивности проявления суточных приливов, особенно это касается зоны влияния трещины 995 на наблюдательной станции №1, расположенной на отметке 814 метров, рисунок 2а. Менее очевидные сезонные особенности земных приливов в виде широкополосных вертикальных движений проявились в зимний период в зоне влияния трещины 69 на станции №2. Напротив, повышенная интенсивность приливных движений передовых блоков массива 59-1 преимущественно отмечалась в теплое время года весной и летом.

Представляется, что отмеченные особенности сезонного проявления земных приливов в створе Токтогульской ГЭС связаны со специфическим расположением контролируемых участков. Первые два из них в зонах влияния крупных трещин бортового отпора левобережного примыкания плотины, расположенные между основным массивом и телом бетонной плотины, вследствие термоупругих деформаций скального массива и плотины, испытывают в течение года закономерно меняющиеся с окружающей температурой, силы сжатия. Очевидно, вызванные ими деформации, и, соответственно, стесненность участков, ослабевают с понижением температуры воздуха, улучшая мобильность блочной среды и усиливая ее реакцию на приливные воздействия со стороны Луны и Солнца в осенне-зимний период.

В то же время термические деформации не оказывают непосредственного влияния на подвижность приповерхностного слоя пород, в частности, передовой части массива 59-1. В данном случае подвижность, и соответственно, устойчивость, покоящихся на поверхности потенциально неустойчивых блоков, в основном

определяется величиной трения, удерживающего их на крутом склоне. Она может уменьшаться во время сильных дождей, проявляясь в усилении камнепада, и увеличении крутизны скального каньона при повышении уровня воды в водохранилище. Действие указанных факторов усиливаются в теплое время года.

В целом, согласно представленным результатам, наиболее интенсивные приливные движения испытывают передовые блоки правобережного массива 59-1, гораздо слабее они проявляются в зонах влияния трещин 995 и 69 на участке левобережного примыкания плотины. Поскольку устойчивость структурных элементов горного склона находится в обратной зависимости от степени их мобильности, то, по данному показателю, структурные элементы левобережного примыкания представляются гораздо более устойчивыми по сравнению со свободно покоящимися на склоне передовыми блоками массива 59-1.

Рассмотренные особенности проявления земных приливов полезно учитывать при оценке и прогнозе устойчивости обвало оползне опасных структурных элементов горных склонов. Усиление приливных деформаций, означает повышение их мобильности и, соответственно, снижение устойчивости, и, напротив, уменьшение интенсивности приливов, следует рассматривать как признак повышения устойчивости контролируемых массивов.

В качестве косвенного количественного показателя неустойчивости, учитывая высокую воспроизводимость приливообразующего потенциала, может быть рекомендована величина спектральной плотности мощности движений (амплитуды) суточной приливной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Токтогульская ГЭС на реке Нарын. Материалы к рабочим чертежам. Ориентировочная сценка устойчивости обвально-оползневых

- массивов на склонах долины р. Нарын в районе Токтогульского гидроузла.-М.: Фонды Всесоюзного ордена Ленина проектно-изыскательского института им. С.Я.Жука. 1970. 63 с.
2. Технический отчет по теме: «Исследование скального основания плотины Токтогульской ГЭС на р.Нарын. ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева и Гидропроект им. С.Я.Жука. Л. 1969.
 3. Токтогульская ГЭС на р. Нарын. Материалы к рабочим чертежам: «Крепление массивов левого берега №11 и №5». Записка №9026/34-т46а. Москва 1973. 25 с.
 4. Исследование статической устойчивости элементов склонов каньона р. Нарын в районе строительства Токтогульской ГЭС. Промежуточный отчет. – Фрунзе: Фонды ИФиМГП, 1970.
 5. Токтогульская ГЭС на р. Нарын. Технический проект основных сооружений. Т. 1. Природные условия, инженерно-геологическое обоснование. Ташкент, САО Гидропроект, 1969. 301 с.
 6. Степанов В.Я. Механика горных склонов–Бишкек: Илим, 1992,192 с.
 7. Мельхиор П. Земные приливы. М.: Мир, 1968.
 8. Латынина Л. А., Кармалеева Р. М. Деформографические измерения. М.: Наука, 1978, с. 154.
 9. Манжиков Б.Ц., Тилегенов К. Мобильность потенциально неустойчивых скальных массивов на участке Токтогульской ГЭС/Современные проблемы механики сплошных сред. Вып. 17, с. 125–135.

УДК 532.546

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА
В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ГАЗОПРОВОДЕ**

А.И. Бийбосунов, С.Т. Жусупбекова

ИФН КНУ им. Ж.Баласагына, КНАУ им. К.Скрябина

Практическая реализация схемы генеральной схемы газификации и газоснабжения нашей республики до 2030 г., строительство и эксплуатация магистральных газопроводов, в том числе Север-Юг, привлекает в настоящее время значительный интерес в связи с вопросами минимизации потерь на транспортировку газа в газопроводах. В работе сформулирована математическая модель, описывающая нелинейную фазу развития возмущений в сжимаемом пограничном слое в поле центробежных сил при больших, но докритических числах Рейнольдса и Гертлера.

В криволинейной ортогональной системе координат уравнения Навье – Стокса могут быть записаны в безразмерной форме в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{Kv}{1-Ky} = 0 \quad (9) \\
& \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{Kuv}{1-Ky} + \frac{1}{1-Ky} \frac{\partial P}{\partial x} = \\
& = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2K}{(1-Ky)^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{K^2 u}{(1-Ky)^2} \right] \\
& \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{Ku^2}{1-Ky} + \frac{\partial P}{\partial y} = \\
& = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2K}{(1-Ky)^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{K^2 v}{(1-Ky)^2} \right] \\
& \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} = \\
& = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (1)
\end{aligned}$$

Координаты X, Y, Z отнесены к L , компоненты скорости U, V, W (вдоль осей координат X, Y, Z соответственно) – к U_∞ , давление P – отнесено к ρU_∞^2 (где ρ - плотность жидкости).

В дальнейшем используются только безразмерные переменные (независимые и искомые).

Предполагается, что кривизна вогнутой поверхности:

$$K = L/R = \varepsilon K < 1, \quad K \sim O(1), \quad \varepsilon < \varepsilon < 1$$

т.е. рассматриваются такие течения, когда число Гертлера велико:

$$G_e = 2 Re^{1/2} L/R \sim O(\varepsilon^{-1/2}) > 1$$

Пусть «а», «b» и «с» - характерные толщина, протяженность и ширина пространственной возмущенной вихревой области течения. Очевидно, эти величины должны быть больше характерной длины свободного пробега молекул жидкости $O(\varepsilon^2)$, иначе для исследования течения в областях с характерными размерами:

Рассмотрим режим, соответствующий длинам волны вихрей Гертлера λ , сравнимые с толщиной пограничного слоя δ . В этом

случае характерные размеры возмущенной области течения совпадают по порядку величины, тогда одинаковые порядки будут иметь и возмущенные величины вертикальной и трансверсальной скоростей $v \sim w$, что следует из уравнения неразрывности и принципа минимального вырождения.

Предположим, что вихри вызывают нелинейные изменения основного течения, тогда

$$u \sim \Delta u \sim 0$$

Нелинейность, проявляющаяся трансверсальном направлении дает

$$w \sim \Delta w \sim (\Delta p)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

При этом исследуются нелинейные процессы, проявляющиеся в течении с характерным масштабом в направлении координаты z равным λ , что определяет величину градиента давления в поперечном направлении:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\rho u^2}{\kappa} \quad (1.2)$$

Отсюда $\Delta p \sim \varepsilon \kappa$.

Далее
$$v \sim w \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} \quad (1.3)$$

Из уравнения неразрывности и оценок (1.1) - (1.3) можно найти продольный размер возмущенной области

$$x \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

Для дальнейшего анализа важно оценить порядок отношения диффузионного и инерционного членов в уравнении продольного импульса:

$$\frac{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}} \sim 0(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}}) \rightarrow 0$$

Понятно, что в таких условиях не выполнено условие прилипания и поэтому необходимо ввести на дне основной области подслоя с толщиной:

$$y \sim \varepsilon^{\frac{3}{4}} \kappa^{-\frac{1}{4}}$$

течение в котором будет описываться системой уравнений трехмерного пограничного слоя. Решение такой системы можно представить в виде: $x \approx 1 + \lambda \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \kappa^{-\frac{1}{2}} x_\alpha$

$$y \approx \lambda y_\alpha$$

$$z \approx \lambda z_\alpha$$

$$u(x, y, z, \varepsilon) \approx u_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) + \dots$$

$$v(x, y, z, \varepsilon) \approx v_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \cdot \lambda^{-1} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} + \dots$$

$$w(x, y, z, \varepsilon) \approx w_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} + \dots \quad (1.5)$$

$$\rho(x, y, z, \varepsilon) \approx \rho_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) + \dots$$

$$H(x, y, z, \varepsilon) \approx H_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) + \dots$$

$$P(\gamma \mu_\infty^2)^{-1} + \varepsilon \rho_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) + \dots$$

Подстановка этих разложений в систему уравнений Навье – Стокса и совершение предельного перехода при $Re \rightarrow \infty, Ge \rightarrow \infty$ приводят к модифицированной системе уравнений Эйлера для трехмерного возмущенного течения.

Отличие полученной системы уравнений от обычной системы уравнений Эйлера состоит в наличии члена в уравнении для поперечного импульса, учитывающего влияние центробежных сил.

Другая особенность связана с отсутствием градиента давления в уравнении продольного импульса. Аналогичным первым интегралом обладает и уравнение для полной энтальпии. Для возмущений малой амплитуды решение системы уравнений можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
u(x) &= u_0(y_\alpha) + \tau u_\alpha(y_\alpha) \sin z_\alpha \exp(\alpha x_\alpha) + \dots \\
v_\alpha &= \tau v_\alpha(y_\alpha) \exp(\alpha x_\alpha) \sin z_\alpha + \dots \\
w_\alpha &= \tau w_\alpha(y_\alpha) \exp(\alpha x_\alpha) \cos z_\alpha + \dots \\
H_\alpha &= H_0(y_\alpha) + \tau G_0(y_\alpha) \exp(\alpha x_\alpha) \sin z_\alpha + \dots \\
\rho_\alpha &= \rho_0(y_\alpha) + \tau R_\alpha(y_\alpha) \exp(\alpha x_\alpha) \sin z_\alpha + \dots \\
P_\alpha &= P_0(y_\alpha) + \tau P_\alpha(y_\alpha) \exp(\alpha x_\alpha) \sin z_\alpha + \dots \\
\tau &\ll 1
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Ограничиваясь нулевым и первым приближением из (1.6) и (1.7) можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}
\alpha \rho_0 u_\alpha + \alpha u_\alpha R_\alpha + \rho_0 v'_\alpha + v_\alpha \rho'_0 - \rho_0 w_\alpha &= 0 \\
\alpha u_0 u_\alpha + v_\alpha u'_0 &= 0 \\
\beta [\alpha u_0 u_\alpha + 2 u_0 u'_\alpha] + \frac{1}{\rho_0} P_\alpha u'_0 - \frac{R_\alpha}{\rho_0^2} \rho'_0 &= 0 \\
\frac{1}{\rho_0} P'_0 &= -u_0^2
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
\alpha u_0 w_\alpha + \frac{R_\alpha}{\rho_0} &= 0 \\
\alpha u_0 G_\alpha + v_\alpha H'_0 &= 0
\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$H_0 = \frac{\gamma-1}{\rho_0 \mu_\infty^2} + \frac{u_0^2}{2}$$

$$G_\alpha = -\left(1/\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\mu_\infty^2\right) R_\alpha/\rho_0^2 + u_0 u_\alpha$$

$$\rho_0 = \mu_0^2 (u_0^2 \mu_\infty^2) \rho_0 = \rho'_0 v_1(\alpha u_0)$$

где $(\quad)' = \frac{\partial}{\partial y}$.

Если ввести новую переменную $z = \frac{u_0}{u_\alpha}$, то тогда можно свести систему (1.8) к одному дифференциальному уравнению:

$$z'' + 2z' \left(\frac{\mu'_0}{\mu_0} \right) + z \left(-\beta + 2 \left(\frac{\mu'_0}{\mu_0 \alpha^2} \right) \right) = 0 \tag{1.10}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0; \\ z(\infty) &= 0, \quad z(0) = \text{const.} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Это уравнение представляет собой задачу на собственные значения. Существует два пути решения уравнения (1.10) с граничными условиями (1.11): поиск собственных значений матрицы, получающейся при разностном представлении уравнения (1.10) второй путь, как результат решения дифференциального уравнения методом Рунте-Кутта.

На рис. 1 и 2, представлены профили скорости z для различных значений φ , μ_∞ , γ .

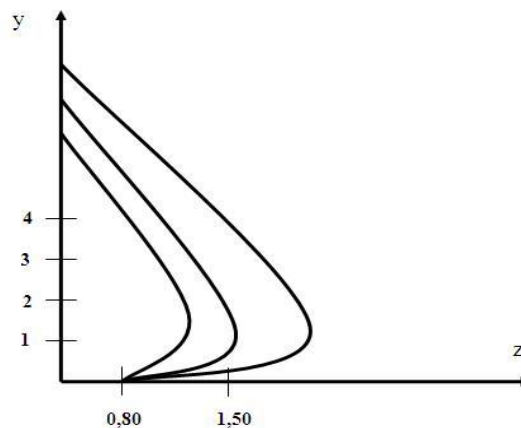


Рис.1. График распределения скорости z при

$$\begin{aligned} \mu &= 0,2, \quad \varphi = 2,5, \quad \gamma = 1,8 \quad \alpha = 15, \quad \beta = 0,01 \\ \mu &= 0,2, \quad \varphi = 0,6, \quad \gamma = 1,8 \quad \alpha = 15, \quad \beta = 0,01 \\ \mu &= 0,2, \quad \varphi = 2,0, \quad \gamma = 1,8 \quad \alpha = 3,5, \quad \beta = 0,01 \end{aligned}$$

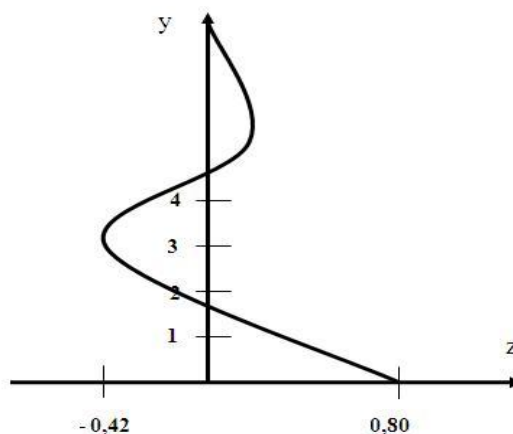


Рис.2. График распределения скорости z при

$$\mu = 1,4, \quad \varphi = 1,4, \quad \gamma = 1,8 \quad \alpha = 15, \quad \beta = 0,01$$

При этом в нелинейном приближении также численно получены зависимость местного числа Рейнольдса от инкремента роста амплитуды вихрей для первых трех основных вихревых мод.

Таким образом, это позволяет исследовать проблемы перехода ламинарных течений к турбулентным потокам и развития вихрей, возникающих вблизи искривленных участков газопроводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Наука, 1968.-260с.
2. Peerhossaini H. On the subject of Gortler vortices. Lecture notes in Physics, 1984, ed. S. Zaleski, pp. 376 – 384.

УДК 535.41:778.38

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ОПТИКЕ ФАЗОВЫХ СРЕД

Ю. Х.Исманов, Н. М.Кулмурзаев

КГУСТА им. Н. Исанова

Обратные задачи в оптике –это чаще всего проблема восстановления фазы волнового фронта, которая возникает во многих разделах физики. В рентгеноструктурном анализе, например, могут быть определены только абсолютные величины структурных факторов при явно утраченной фазе. Характеристики рассеяния (например, его дифференциальное сечение) позволяют получить только абсолютный квадрат амплитуды рассеяния, тогда как знание фазы необходимо для определения свойств рассеивающих объектов.

Необходимо подчеркнуть, что решение задачи нахождения фазы, т. е. вычисления фазы функции по ее модулю, возможно только тогда, когда известно наперед, что рассматриваемая комплексная функция принадлежит определенному функциональному классу [1, 2]. В случае оптических задач встречаемся с функциями, заданными в ограниченной полосе частот.

Обратные оптические задачи можно разделить на следующие два основных класса:

- 1) задачи, имеющие целью получение информации о пространственных изменениях функций источников

(пространственно-частотных спектров), таких как профиль интенсивности или степень пространственной когерентности и другие пространственные корреляции [3];

- 2) задачи, имеющие целью получение информации о временных изменениях, т. е. динамики функций источников, или временных частотных спектрах, таких как спектральная плотность или степень временной когерентности и другие временные корреляции [4].
- 3) задачи, которые объединяют спектральный и пространственные подходы и представляют собой восстановление формы объемного резонатора по спектру собственных значений или функции временной когерентности [5].

Перечисленные задачи являются общими обратными задачами в оптике. В случае интерферометрии эти задачи сводятся к задаче расшифровки интерферограмм. Расшифровка интерферограмм предполагает установление однозначных зависимостей параметров интерференционной картины от условий прохождения светового луча через исследуемый прозрачный объект.

Известно, что интерферометрический метод изучения прозрачных неоднородностей основан на свойстве локального изменения показателя преломления просвечиваемой среды в результате изменения ее плотности. Следствием этого является запаздывание по фазе световой волны, прошедшей через объект исследования, по сравнению с волной, прошедшей без объекта исследования. Определение этого времени запаздывания и установление закона распределения показателя преломления (или плотности) вдоль светового луча и является задачей интерпретации интерферограмм.

В большинстве практических задач исследуемые неоднородности можно свести к двум типам: двумерным и осесимметричным. В первом случае оптическая длина светового луча

через различные участки неоднородности одинакова, во втором – зависит от радиуса неоднородности.

Существуют два основных способа расшифровки интерферограмм: геометрический и фотометрический. Общим для обоих способов является то, что измеряемый параметр, например плотность ρ , определяется в виде суммы ρ_0 и $\Delta\rho$, где ρ_0 – некоторая начальная плотность, $\Delta\rho$ - приращение плотности. Приращение плотности определяется сравнением интерференционных картин с объектом и без объекта или сравнением участков интерферограмм с изменившимися и неизменившимися в результате влияния объекта характеристиками интерференционного поля.

При геометрической расшифровке измеряется смещение полос (при изменении плотности по всему полю) или их искривление (при локальном изменении плотности).

Для двумерных прозрачных сред зависимость между разностью фаз и плотностью ΔD на негативе, вызвавшей ее, имеет вид

$$\Delta\delta = 4,6 \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{\Delta D}{\gamma}, \quad (1)$$

где ρ - коэффициент отражения зеркал интерферометра, γ - коэффициент контрастности фотоматериала.

Учет характеристик интерферометра для $\Delta\delta$ дает выражение

$$\Delta\delta = 4,6 \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{\Delta D}{\gamma} \cdot \frac{1 + 2,3\Delta D^* / \gamma}{(2,3\Delta D^* / \gamma)^{1/2}}, \quad (2)$$

где $\Delta D^* = D_{\max} - D_0$ - разность оптических почернений, соответствующих максимальной интенсивности и интенсивности, на которую настроен интерферометр. Последний множитель учитывает настройку интерферометра, т. е. уровень интенсивности интерференционного поля по отношению к максимальной. Если приращение разности фаз $\Delta\delta$ произошло за счет изменения плотности исследуемой среды, то

величину $\Delta\delta$ можно связать с изменениями интенсивности интерференционной картины, предварительно установив взаимозависимость показателя преломления и плотности.

В общем виде взаимозависимость этих величин определяется формулой Лоренц – Лорентца

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N_0 \frac{4\pi e^2 f}{3m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (3)$$

где N_0 - число частиц в 1 см^3 материала исследуемой среды; e и m - заряд и масса электрона соответственно; f - сила осциллятора; ω_0 - собственная частота колебаний электрона; ω - частота колебаний внешнего поля.

Для данного вещества и данной длины волны можно считать, что значения величин e , m , ω и ω_0 постоянны. Для газообразных сред, где $n \approx 1$, справедливо соотношение

$$(n^2 - 1)(n^2 + 2) = 2(n - 1)/3. \quad (4)$$

С учетом этого формулу (3) можно привести к виду

$$(n - 1)/\rho^* = K, \quad (5)$$

где ρ^* - плотность исследуемой газообразной среды; K - константа. Из полученного выражения, известного как формула Гладстона-Дейла, следует

$$n - 1 = K\rho^*;$$

$$dn = Kd\rho^*.$$

С учетом полученных зависимостей можно записать выражение для приращения плотности $\Delta\rho^*$ в виде

$$\Delta\rho^* = \frac{\lambda}{8Kh} \frac{1 - \rho}{\pi\sqrt{\rho}} \frac{1 + 2,3\Delta D^* / \gamma}{(2,3\Delta D^* / \gamma)^{1/2}} \frac{2,3(D_1 - D_0)}{\gamma}, \quad (6)$$

где D_1 - оптическая плотность почернения на участке интерференционного поля, где произошло изменение интенсивности за счет приращения плотности.

В соотношении (6) значения величин λ, K, h, ρ известны, $\Delta D^*, D_1, D_0, \gamma$ определяются из эксперимента. Абсолютные значения плотности ρ^* складываются, как уже говорилось, из ρ_0^* и $\Delta \rho^*$. Таким образом проводится расшифровка интерферограмм при фотометрическом способе их обработки.

Если расшифровка выполняется геометрическим способом, то плотность определяется из соотношения

$$\rho^* = \rho_0^* + \frac{\lambda}{Kh} s, \quad (7)$$

где K – постоянная Гладстона; s – смещение в долях полосы, замеряемое на интерферограмме.

При изучении осесимметричных неоднородностей измеряемая величина изменения разности хода является результатом воздействия на световой луч всех точек неоднородности, лежащих на пути луча.

Рассмотрим осесимметричную неоднородность с радиусом r_0 , расположенную между зеркалами многоканального интерферометра. Если показатель преломления неоднородности отличается от значения n_0 в невозмущенной среде, то

$$\Delta \delta = (4\pi / \lambda) \int_{-x}^x (n - n_0) dx, \quad (8)$$

где dx выражается через текущую радиальную координату неоднородности в виде

$$dx = \frac{2rdr}{(r^2 - y^2)^{1/2}} \quad (9)$$

Зависимость, связывающая изменение разности фаз с оптической плотностью почернения фотопленки и параметрами интерферометра, имеет вид

$$\Delta\delta = \frac{2,3(D_y - D_0)}{\gamma} \frac{1 - \rho}{2\sqrt{\rho}} \frac{[1 + \frac{2,3(D_{\max} - D_0)}{\gamma}]}{(2,3 \frac{D_{\max} - D_0}{\gamma})^{1/2}}. \quad (10)$$

После несложных преобразований из выражений (9) и (10) получаем

$$\frac{\lambda}{K}(D_y - D_0) = \eta \int_y^r \frac{(\rho^* - \rho_0^*) r dr}{(r^2 - y^2)^{1/2}}, \quad (11)$$

где

$$\eta = \frac{16\pi\gamma}{2,3} \frac{[2,3 \frac{D_{\max} - D_0}{\gamma} \rho]^{1/2}}{[1 + 2,3 \frac{D_{\max} - D_0}{\gamma}](1 - \rho)}. \quad (12)$$

Разность между плотностью в некоторой точке исследуемой неоднородности ρ_y^* и значением ρ_0^* в области без неоднородности

$$\rho_y^* - \rho_0^* = \frac{\lambda}{\pi K \eta \bar{r}_i} \frac{d}{dr_i} \int_{\bar{r}_i}^1 \frac{(D_y - D_0) r dr}{(\bar{r}^2 - \bar{r}_i^2)^{1/2}}, \quad (13)$$

где $\bar{r}_i = y/r_0$, $\bar{r} = r/r_0$.

Выражение (13) является преобразованием Абеля относительно искомой величины $\rho^* - \rho_0^*$; оно представляет собой решение уравнения (11).

В общем случае решение уравнения (11) возможно лишь при условии внесения каких-либо предположений относительно закона изменения $D_y - D_0$ или $\rho_y^* - \rho_0^*$. Целый ряд расчетных методов основан на аппроксимации функции, подлежащей определению. Например, метод Шардина предполагает постоянство экспериментальной функции внутри кольцевых зон, на которые разбивается сечение

осесимметричной неоднородности. Другой метод основан на аппроксимации функции $\rho_y^* - \rho_0^*$ в каждой зоне линейной функцией. В методе Лихушина, предназначенном для определения полей плотности осесимметричных сверхзвуковых потоков газа, экспериментальная функция представляется в виде суммы $A(1 - \bar{r}^2)^{1/2} + B(\bar{r})$, где A – некоторая постоянная величина; $B(\bar{r})$ – плавно изменяющаяся функция. Аппроксимация Лихушина учитывает влияние скачка уплотнения коэффициентом A и изменение плотности за ударной волной, которое считается достаточно плавным, коэффициентом B . После интегрирования искомая функция выражается в виде суммы произведений значений экспериментальной функции в граничных точках зон на некоторые постоянные коэффициенты.

Достоинством метода является зависимость распределения смещения полос и плотности непосредственно от радиуса осесимметричной неоднородности, а также удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных результатов для крайних зон осесимметричной неоднородности. Но этот метод весьма трудоемок и в области сильных градиентов плотности не всегда удовлетворительно аппроксимирует искомую функцию (даже при разбиении сечения неоднородности на большое число зон, например при $N=50$). Более точную аппроксимацию можно получить при замене искомой функции некоторой квадратичной, имеющей вид $a_j \bar{r}^2 + b_j \bar{r} + c$, где коэффициенты a_j, b_j, c для каждой j -ой зоны выражаются через значения в граничных точках зоны.

Дальнейшим усовершенствованием расчетных методов определения параметров осесимметричной неоднородности явилась методика В. А. Емельянова. Ее главным отличием является

дифференцирование по ψ приближенно вычисленного из уравнения (13) интеграла:

$$\psi(\bar{y}) = \int_{r_i}^1 \frac{(D - D_0)\bar{r}d\bar{r}}{(\bar{r}^2 - \bar{r}_i^2)^{1/2}} \quad (14)$$

Это оказывается возможным благодаря тому, что функция (14) более гладкая, чем функция $D_y - D_0$. Подобный прием приводит к повышению точности расчетного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Walther A. Opt. Acta, v.10, No. 41, 1963, p.p. 78-96
2. Wolf E. Proc. Phys. Soc. , London, v. 80, No. 1269, 1962, 32-74
3. Goodman J. W. Synthetic-Aperture Optics. - Progress in Optics, ed. by E. Wolf, v. VIII, North-Holland, Amsterdam, London, 1970, p.p. 1-50
4. Frieden B. R. Evaluation, Design and Extrapolation for Optical Signals.- Progress in Optics, ed. by E. Wolf, v. VIII, North-Holland, Amsterdam, New York, 1971, p.p. 311-407
5. Wang J. Y., Goulard R. Appl. Opt. v. 14, 1975, p.p. 862-871

УДК-519.622(575.2)(04)

О МЕТОДАХ ЭЙЛЕРА И РУНГЕ-КУТТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.М. Осмонканов, М.М. Султанова

КГУСТА им.Н. Исанова

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение первого порядка $y = f(x; y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ в некотором промежутке $x_0 \leq x \leq x_0 + a$.

Для решения уравнения будем пользоваться одним из следующих численных методов.

Метод Эйлера.

Назовем величину $h_n = x_{n+1} - x_n$ – шагом интегрирования. Эта величина выбирается малой. Метод Эйлера состоит в том, что в коротком промежутке $x_n \leq t \leq x_n + h$ функцию $f(t; y(t))$ приближенно заменяют постоянной величиной $f(x_n; y_n)$, которая определена, если величина x_n выбрана, а y_n уже определена. Тогда, имеет место равенство:

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n; y_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

позволяющее последовательно определять величины $y_1, y_2, \dots, y_n$ если заданы x_0 и y_0 и выбраны узлы.

Используя формулу (1) проводим вычисления. Результаты

представим в виде таблицы1.

Таблица 1.

n	x_n	y_n	$f(x_n; y_n)$	y_{n+1}
0	0	1,5000	1,5000	1,875
1	0,25	1,875	1,625	2,2812
2	0,5	2,2812	1,7812	2,7265
3	0,75	2,7265	1,9765	3,2206
4	1	3,2206	2,2206	3,7756
5	1,25	3,7756	2,5256	4,4070
6	1,5	4,4070	2,9070	

Метод Рунге-Кутты

Пусть $r \geq 2$ – целое положительное число и $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}$ – положительные числа.

Пусть числа $\beta_{sm} (s = 1, 2, \dots, r-1; m = 1, 2, \dots, s)$ и $y_1, y_2, \dots, y_r$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_{m=1}^s \beta_{sm} = \alpha_s (s = 1, 2, \dots, r-1) \quad \sum_{j=1}^r \gamma_j = 1$$

Один этап метода Рунге-Кутты (переход от x_n к x_{n+1}) таков:

1. Вычисляются одно за другим следующие числа:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n; y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \alpha_1 h; y_n + \beta_{11} k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \alpha_2 h; y_n + \beta_{21} k_1 + \beta_{22} k_2) \\ &\dots \dots \dots \\ k_{j+1} &= hf(x_n + \alpha_j h; y_n + \beta_{j1} k_1 + \beta_{j2} k_2 + \dots + \beta_{jj} k_j) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$k_r = hf(x_n + \alpha_{r-1}h; y_n + \beta_{r-1,1}k_1 + \beta_{r-1,2}k_2 + \dots + \beta_{r-1,r-1}k_{r-1})$$

2. Вычисляется сумма произведений:

$$k = \sum_{j=1}^r \gamma_j k_j \quad (2)$$

3. Вычисляется y_{n+1} по формуле: $y_{n+1} = y_n + k$

Числа $\alpha_s, \beta_{sm}, \gamma_j$ при заданном r выбираются так, чтобы разность:

$$\int_{x_n}^{x_n+h} (f(t; y(t))) dt - k$$

$(y(t))$ решение исходного уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_n) = y_n$, рассматриваемая как функция переменного h была бесконечно малой возможно более высокого порядка/относительно h при $h \rightarrow 0$.

Приведем наиболее употребительную систему этих чисел:

$$r = 4, \alpha_1 = \beta_{11} = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \beta_{22} = \frac{1}{2}, \beta_{21} = 0, \alpha_3 = \beta_{33} = 1, \beta_{31} = \beta_{32} = 0, \gamma_1 = \gamma_4 = \frac{1}{6},$$

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \frac{1}{3}, l = 5$$

Такой прием будем называть соответствующим приемом Рунге-Кутты. Приведем порядок вычислений в этом случае:

1. Вычисляется $k_1^{(n)} = h_n f(x_n; y_n)$
2. Вычисляется $k_2^{(n)} = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}; y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2}\right)$
3. Вычисляется $k_3^{(n)} = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}; y_n + \frac{k_2^{(n)}}{2}\right)$
4. Вычисляется $k_4^{(n)} = h_n f(x_n + h_n; y_n + k_3^{(n)})$
5. Вычисляется $k^{(n)} = \frac{1}{6}(k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)})$

6. Вычисляется $y_{n+1} = y_n + k^{(n)}$

Используя соответствующий прием Рунге-Кутты, состоящий из шагов 1 – 6 проводим вычисления. Результаты представим в таблицы 2

Таблица 2.

n	x_n	y_n	$k_1^{(n)}$	$k_2^{(n)}$	$k_3^{(n)}$	$k_4^{(n)}$	k_4	y_{n+1}
0	0	1,5000	0,3750	0,3906	0,3926	0,4106	0,3920	1,8920
1	0,25	1,8920	0,4105	0,4306	0,4331	0,4562	0,4323	2,3243
2	0,50	2,3243	0,4561	0,4818	0,4850	0,5148	0,4841	2,8084
3	0,75	2,8084	0,5146	0,5477	0,5518	0,5900	0,5506	3,3590
4	1,00	3,3590	0,5896	0,6322	0,6375	0,6866	0,6359	3,9949
5	1,25	3,9949	0,6862	0,7408	0,7476	0,8106	0,7456	4,7405
6	1,50	4,7405	0,8101	0,8802	0,8889	0,9699	0,8863	

Окончательно представим результаты вычисления в таблице 3.

Здесь $y_{\text{точ}}$ – точное решение уравнения в точке

$x = 1,5$ $y_{\text{приб}}$ – приближенное решение уравнения в точке $x = 1,5$, $\varepsilon = |y_{\text{точ}} - y_{\text{приб}}|$ – погрешность метода.

Таблица 3.

Метод решения	$y_{\text{точ}}$	$y_{\text{приб}}$	ε
Метод Эйлера	4,4070	4,7408	0,3338
Метод Рунге – Кутта	4,7405	4,7408	0,0003

Поставим перед собой задачу: разработать программу, позволяющую решать дифференциальные уравнения первого порядка. Представим код программ на языке Delphi.

```

unit Unit1;
interface
uses
    Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics,
    Controls, Forms,
    Dialogs, StdCtrls;
type
    TForm1 = class(TForm)
        Label1: TLabel;
        Label2: TLabel;
        Label3: TLabel;
        Label4: TLabel;
        Label5: TLabel;
        Label6: TLabel;
        Label7: TLabel;
        Edit1: TEdit;
        Edit2: TEdit;
        Edit3: TEdit;
        Edit4: TEdit;
        Button1: TButton;
        ListBox1: TListBox;
        procedure Button1Click(Sender: TObject);
    private
        { Private declarations }
    public
        { Public declarations }
    end;
var
    Form1: TForm1;
implementation

```

```

{$R *.dfm}

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var
i:integer;
a,b,m,h,y,x,y1:real;
k1,k2,k3,k4:real;
function f(x,y:real):real;
begin
f:=y-x; end;
begin
a:=StrToFloat(edit1.Text);
b:=StrToFloat(edit2.Text);
m:=StrToFloat(edit3.Text);
y:=StrToFloat(edit4.Text);
h:=(b-a)/m; y1:=y; i:=1; x:=a;
repeat
k1:=h*f(x,y);
x:=x+h/2;
y:=y1+k1/2;
k2:=h*f(x,y);
y:=y1+k2/2;
k3:=h*f(x,y);
x:=x+h/2;
y:=y1+k3;
k4:=h*f(x,y);
y:=y1+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
ListBox1.Items.Add(FormatFloat('y(0.#####)=',x)+FormatFloat('0.#####',y))
;
i:=i+1; y1:=y;
until not (i<=m);

```

end; end.

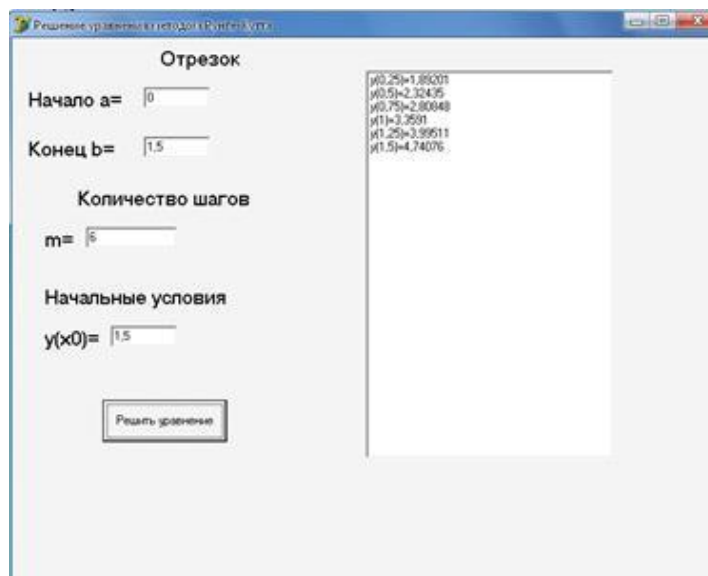


Рис. 1. Интерфейс программы и результаты решения уравнения

Таким образом, наиболее точное численное решение дифференциальных уравнений первого порядка дает и метод Рунге – Кутта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов: учеб.пособие М.:АСТ: Астрель; Владимир: ВКТ, 2008. – 495 с.
2. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах.М.: Наука.1972. – 368 с.
3. Михлин С.Г., Березин С.Г, СмолицкийХ.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука. 1965. — 386 с.

УДК 533 (075.8), 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗРЫВА В АТМОСФЕРНОМ ГАЗЕ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ ДАВИДОВА

А.Б. Чечейбаев, Э.Б. Чечейбаева, Н.Т. Эстебесова

Университет Центральной Азии, КГУСТА им. Н. Исанова

Одним из мощных методов современного вычислительного эксперимента является метод крупных частиц, разработанный Ю.М. Давыдовым [1, 2 и др.]. Метод крупных частиц широко используется при решении задач науки и технологий - в механике сплошных сред, газовой динамике, гидродинамике, физике плазмы, нефте- и газодобыче и др.

Рассмотрим задачу о взрыве в атмосфере. Математической моделью задачи является нестационарная система уравнений Эйлера, состоящая из уравнений неразрывности, импульса и энергии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{U}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot u \cdot \vec{U}) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot v \cdot \vec{U}) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot E \cdot \vec{U}) + \operatorname{div}(p \cdot \vec{U}) = 0 \quad (4)$$

где ρ - плотность газа, p - давление газа, U - скорость газа, E - удельная полная энергия. Система (1) - (4) замыкается уравнением состояния:

$$p = \rho \cdot I \cdot (\gamma - 1), \quad (5)$$

здесь $I = E - \frac{1}{2} \cdot (u^2 + v^2)$ - удельная внутренняя энергия, γ - показатель адиабаты среды, принятый равным 1,4 в данной работе.

Исходная система (1) - (5) приводится к безразмерному виду, используя в качестве характерных физических параметров характерную скорость U_0 , характерную длину l_0 и характерную плотность ρ_0 . Тогда остальные характерные параметры задачи определяются так: $p_0 = \rho_0 \cdot U_0^2$, $E_0 = U_0^2$, $t_0 = l_0/U_0$. Положим, что $U_0 = 10^{5/2}$ м/с, $\rho_0 = 1$ кг/м³, $l_0 = 1$ м, $p_0 = 10^5$ Па, $E_0 = 10^5$ Дж. Безразмерные величины представляются в следующем виде: $\tilde{l} = l/l_0$, $\tilde{U} = U/U_0$, $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$, $\tilde{p} = p/(\rho_0 \cdot U_0^2)$, $\tilde{E} = E/(\rho_0 \cdot U_0^2)$.

Для расчета взрыва в атмосфере используем классический алгоритм метода крупных частиц, предложенный в кандидатской диссертации Ю.М. Давыдова для решения задач газовой динамики [1].

Эйлеров этап. На данном этапе пренебрегаем потоками массы, импульса и энергии через границы эйлеровых ячеек. Тогда дифференциальные уравнения и разностные схемы примут следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \rho \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\tilde{u}_{i,j}^n = u_{i,j}^n - \frac{p_{i+\frac{1}{2},j}^n - p_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x}, \quad (7)$$

$$\tilde{v}_{i,j}^n = v_{i,j}^n - \frac{p_{i,j+\frac{1}{2}}^n - p_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y}, \quad (8)$$

$$\tilde{E}_{i,j}^n = E_{i,j}^n - \frac{p_{i+\frac{1}{2},j}^n u_{i+\frac{1}{2},j}^n - p_{i-\frac{1}{2},j}^n u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n} - \frac{p_{i,j+\frac{1}{2}}^n v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - p_{i,j-\frac{1}{2}}^n v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n}, \quad (9)$$

где параметры на границах ячеек, рассчитываются, например, так:

$$p_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{p_{i+1,j}^n + p_{i,j}^n}{2}.$$

Лагранжев этап. На этом этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю

эйлерову сетку. Здесь находятся за время Δt потоки массы ΔM^n через границы эйлеровых ячеек.

Исходное уравнение неразрывности (1) в разностной форме запишется так (в предположении, что поток жидкости через ячейку (i, j) направлен слева направо и снизу вверх):

$$\rho_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \rho_{i,j}^n \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n \quad (10)$$

На этом этапе вычисляются потоки массы ΔM^n :

$$\begin{aligned} \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n &= \langle \rho_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \cdot \Delta y \cdot \Delta t, \quad \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n = \langle \rho_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \cdot \Delta y \cdot \Delta t, \\ \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= \langle \rho_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \Delta x \cdot \Delta t, \quad \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \langle \rho_{i,j-\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \Delta x \cdot \Delta t, \end{aligned} \quad (11)$$

где, например, поток массы через правую границу ячейки $\Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n$ определялись по формулам первого порядка точности:

Если $u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n > 0$, то $u_{i+1/2,j}^n = (u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n) / 2$, $\rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i,j}^n$.

Если $u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n < 0$, то $u_{i+1/2,j}^n = (u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n) / 2$, $\rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i+1,j}^n$.

(12)

Заключительный этап. Здесь происходит перераспределение массы, импульса и энергии по пространству и определяются окончательные поля эйлеровых физических параметров потока на фиксированной расчетной сетке в следующий момент времени $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\sum \Delta M_k}{\Delta x \cdot \Delta y} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x \cdot \Delta y}, \quad (13)$$

$$X_{i,j}^{n+1} = \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} \tilde{X}_{i,j}^n + \frac{\tilde{X}_{i-1,j}^n \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \tilde{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \tilde{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \tilde{X}_{i,j+1}^n \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y}, \quad (14)$$

где $X = \{u, v, E\}$.

Для моделирования граничных условий на границах области интегрирования применялся метод фиктивных ячеек, разработанный автором метода Ю.М. Давыдовым [1 и др.].

Условие свободного вытекания, например, на правой границе области интегрирования, достигалось следующими условиями для двух слоев фиктивных ячеек:

$$\begin{aligned}\rho_{N+1,j}^n &= \rho_{N,j}^n, \quad p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \quad E_{N+1,j}^n = E_{N,j}^n, \quad u_{N+1,j}^n = u_{N,j}^n, \quad v_{N+1,j}^n = v_{N,j}^n \\ u_{N+2,j}^n &= 2 \cdot u_{N,j}^n - u_{N-1,j}^n, \quad v_{N+2,j}^n = 2 \cdot v_{N,j}^n - v_{N-1,j}^n, \\ E_{N+2,j}^n &= 2 \cdot E_{N,j}^n - E_{N-1,j}^n, \quad p_{N+2,j}^n = 2 \cdot p_{N,j}^n - p_{N-1,j}^n, \\ \rho_{N+2,j}^n &= 2 \cdot \rho_{N,j}^n - \rho_{N-1,j}^n.\end{aligned}$$

Условия непротекания на нижней границе области интегрирования:

$$\begin{aligned}\rho_{i,M-1,j}^n &= \rho_{i,M}^n, \quad p_{i,M-1,j}^n = p_{i,M}^n, \quad E_{i,M-1,j}^n = E_{i,M}^n, \quad u_{i,M-1,j}^n = u_{i,M}^n, \\ v_{i,M-1,j}^n &= -v_{i,M}^n.\end{aligned}$$

Имитация взрыва в атмосфере достигалась постановкой условия, предложенного в работе [4]:

$$\rho_{k,l}^n = M \cdot \rho_{start},$$

где M – коэффициент, характеризующий мощность взрыва, ρ_{start} – начальная плотность невозмущенного газа. До начала взрыва газ принимался покоящимся (скорость равна нулю), $\tilde{\rho} = 1, \tilde{p} = 1$.

В первой серии проведенных вычислительных экспериментов область интегрирования представляла собой квадрат, разбитый на 201 ячейку по каждой стороне. Адрес ячейки взрыва в атмосфере: номер ячейки по горизонтальной оси равен 101 слева направо, а по вертикальной оси – 41 ячейка снизу вверх. На левой, верхней и правой границах области интегрирования ставились условия свободного вытекания, а на нижней – условия непротекания. Коэффициент M в ячейке взрыва варьировался в пределах интервала $[1; 30]$. Безразмерные шаги интегрирования выбраны так: $\tilde{dx}=0.1, \tilde{dy}=0.1, \tilde{dt}=0.01$.

На рис. 1 представлено распределение безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$. Горизонтальными

осями графика служат безразмерные расстояния от точки взрыва параллельно сторонам области интегрирования.

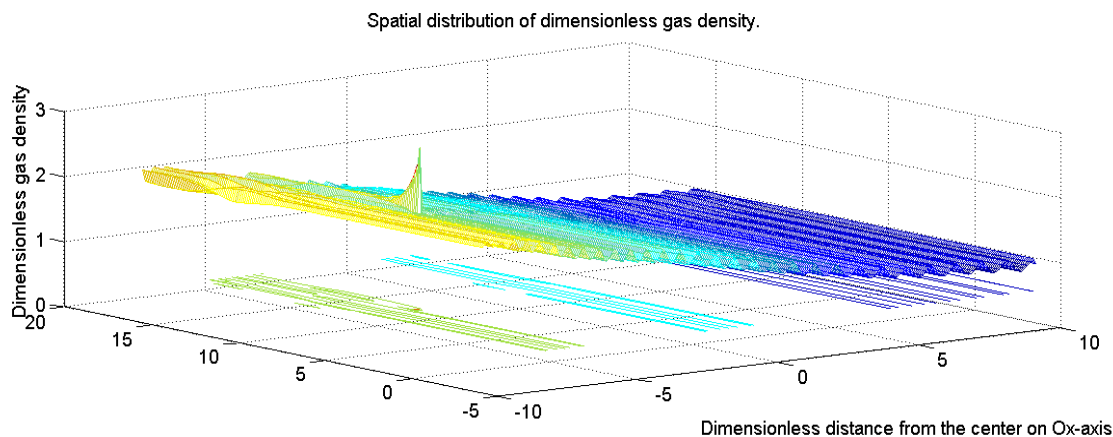


Рис. 1. Плотность газа

На рисунке 3 изображено распределение безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$. По горизонтальной оси отложено безразмерное расстояние от точки взрыва вдоль горизонтальной линии области интегрирования. $M=3$.

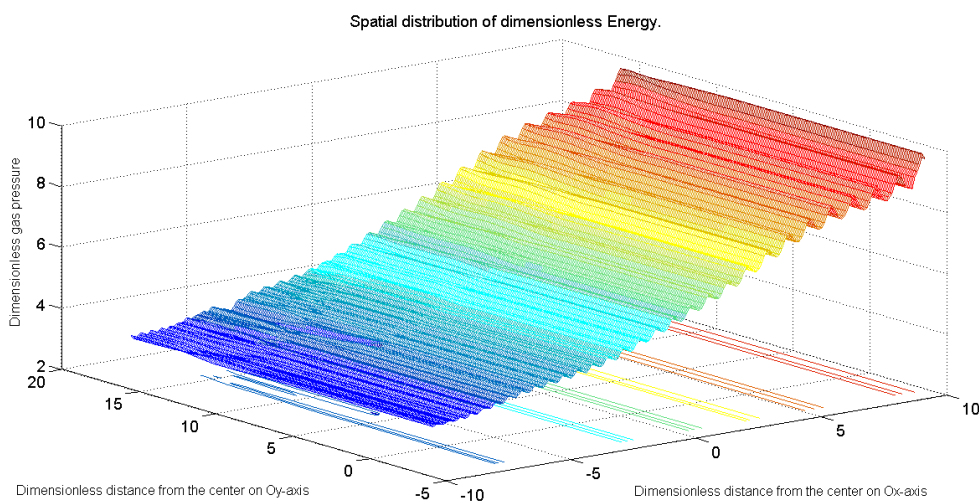


Рис. 2. $M=3$. Распределение безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$.

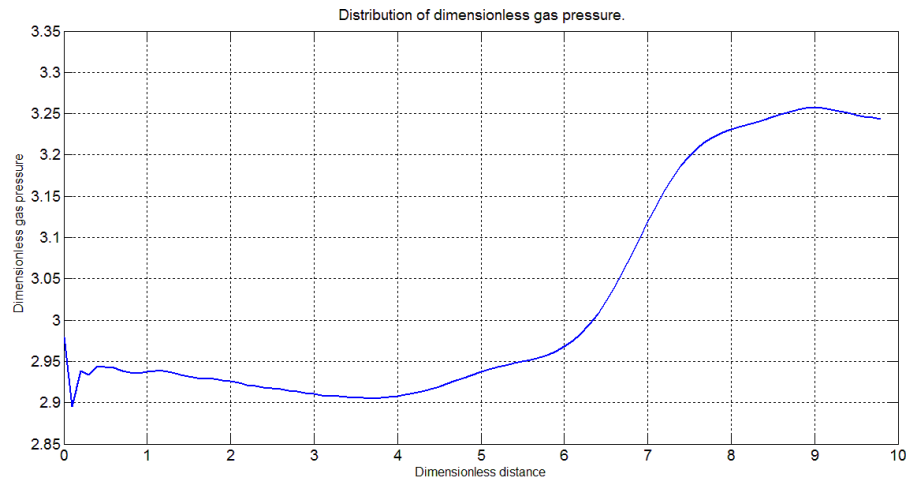


Рис. 3. распределение безразмерной плотности газа

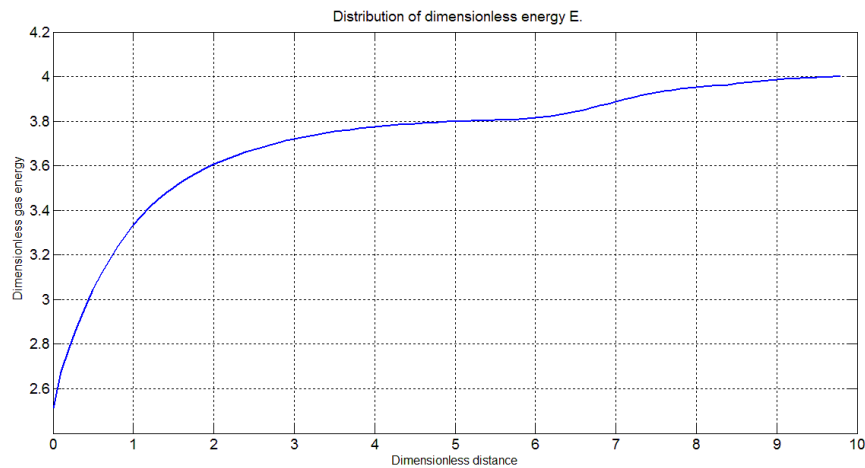


Рис. 4. $M=3$. Распределение безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$.

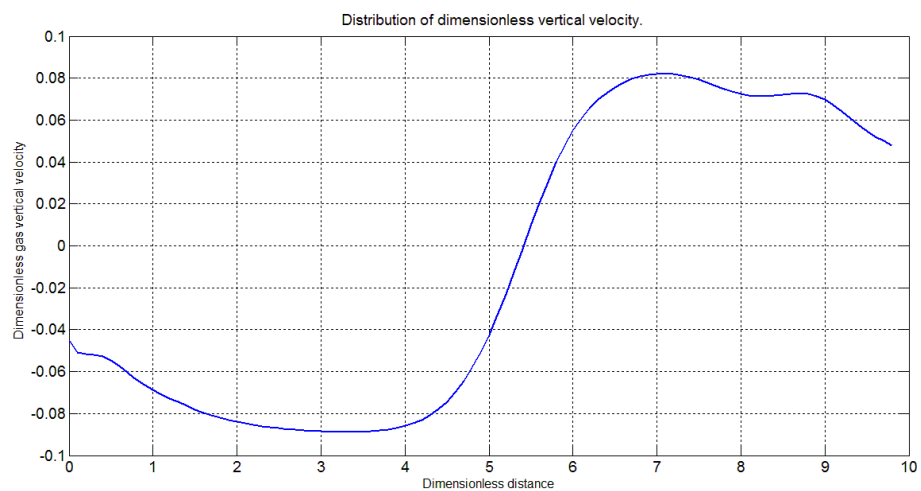


Рис. 5. $M=3$. Распределение безразмерной вертикальной составляющей вектора скорости газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=300$.

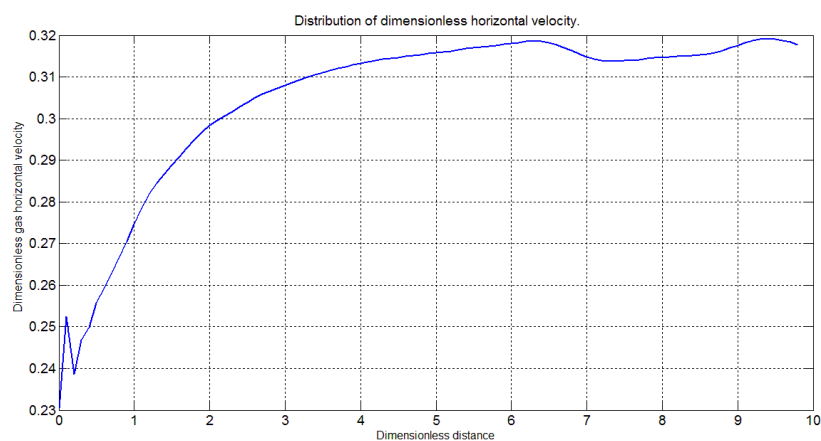


Рис. 6. $M=3$. Распределение безразмерной горизонтальной составляющей вектора скорости газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$.

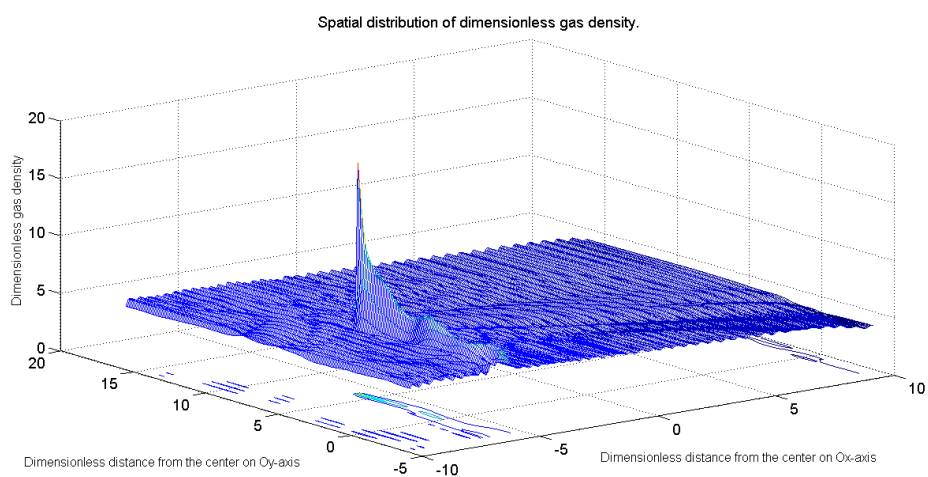


Рис. 7. $M=20$. Распределение безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

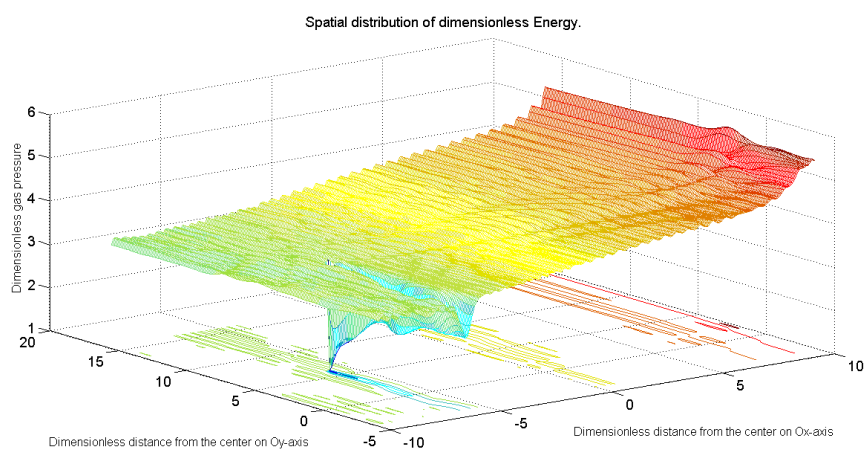


Рис. 8. $M=20$. Распределение безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

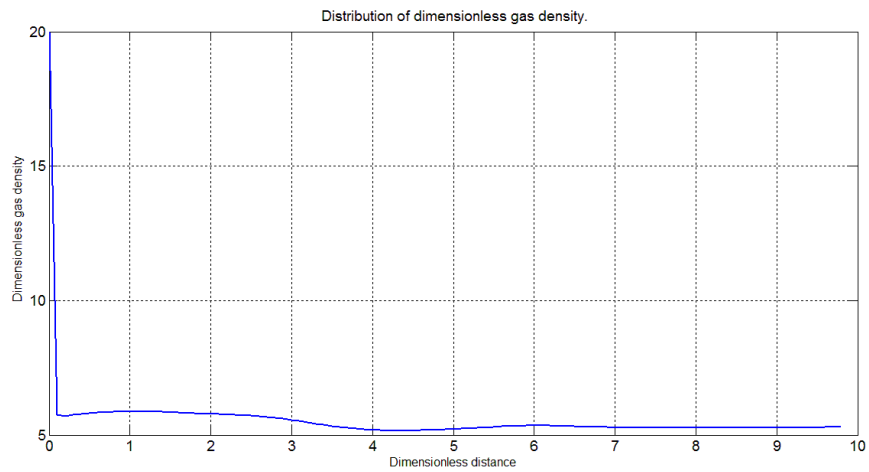


Рис. 9. $M=20$. Профиль безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

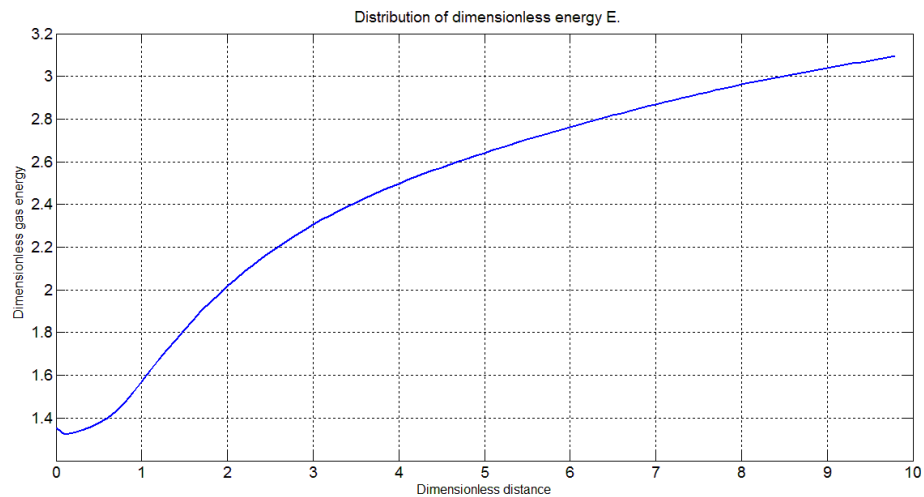


Рис. 10. $M=20$. Профиль безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

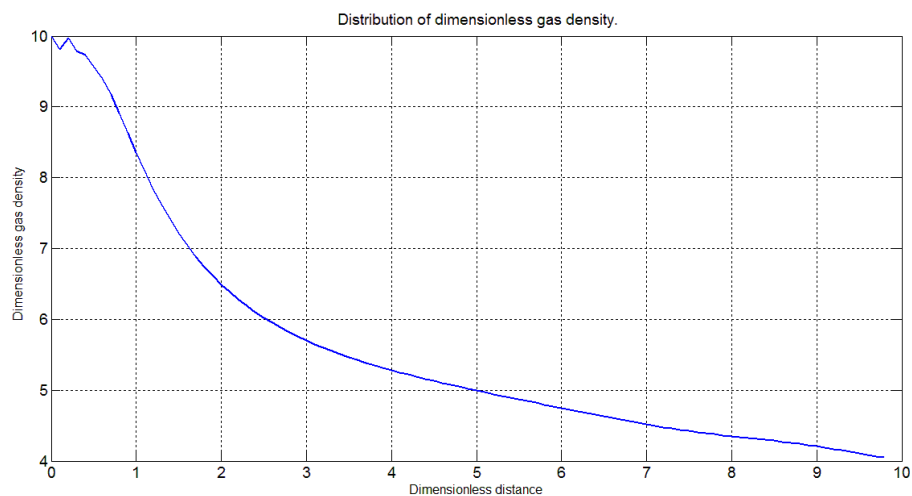


Рис. 11. $M=20$. Профиль безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

Во второй серии проведенных численных расчетов область интегрирования представляла собой квадрат, разбитый на 201 ячейку по каждой стороне. Ячейка взрыва находится в центре области интегрирования: номер ячейки по горизонтальной оси равен 101 слева направо, по вертикальной оси также 101 ячейка снизу вверх. На всех четырех границах области интегрирования ставились условия свободного вытекания. Коэффициент M в ячейке взрыва варьировался в пределах интервала $[1; 30]$. Безразмерные шаги интегрирования выбраны так: $\bar{dx}=0.1$, $\bar{dy}=0.1$, $\bar{dt}=0.01$.

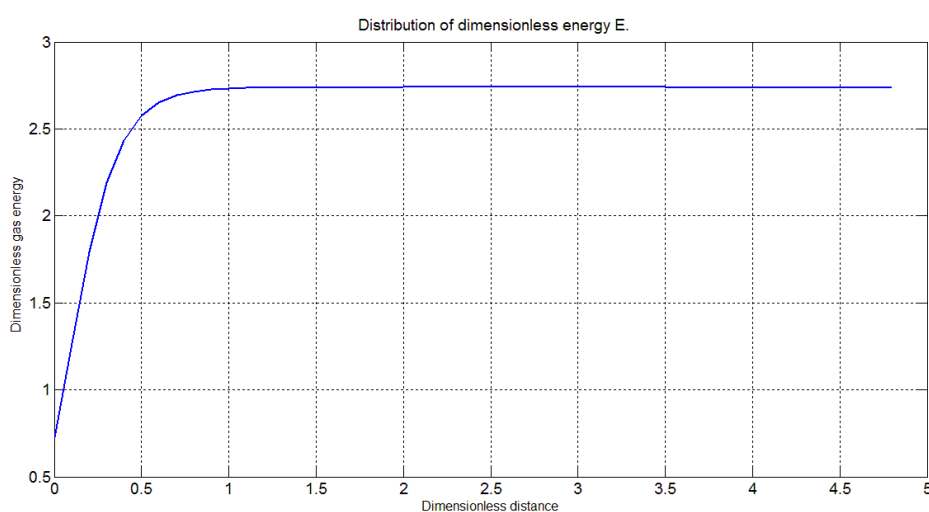


Рис. 12. $M=5$. Профиль безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\bar{t}=1000$.

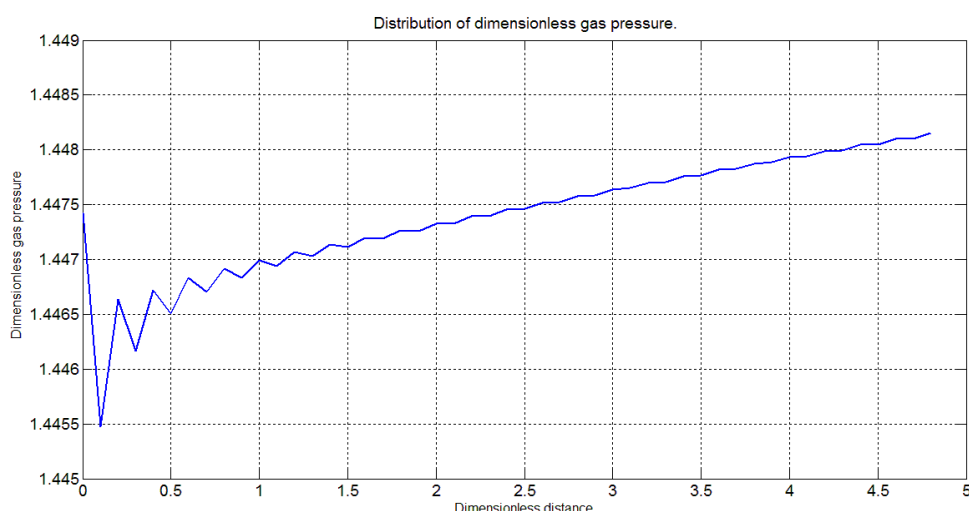


Рис. 12. $M=5$. Профиль безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\bar{t}=1000$.

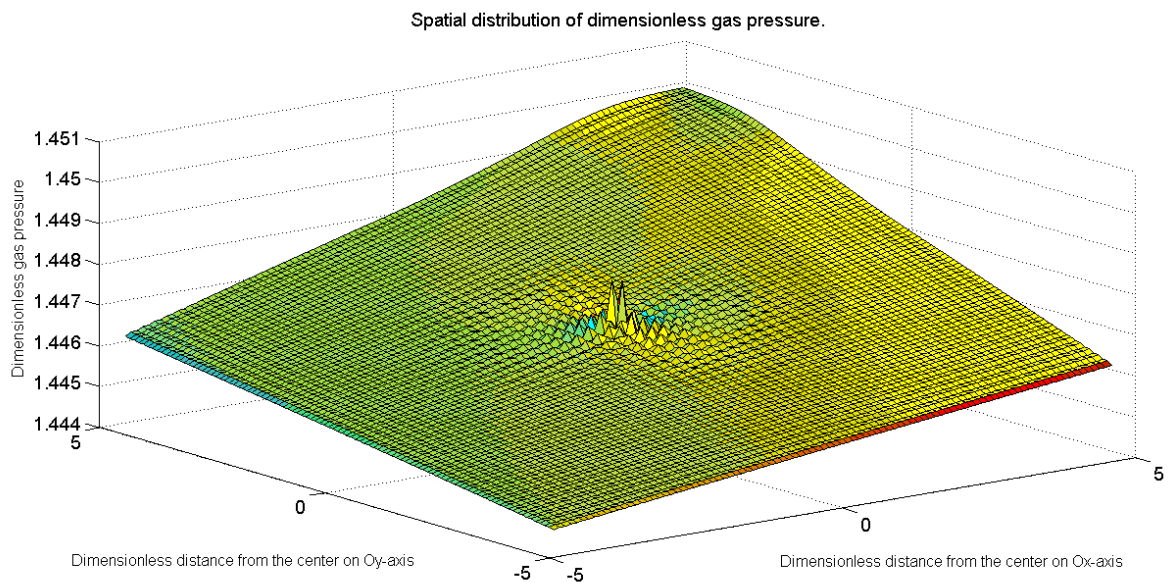


Рис. 13. $M=5$. Распределение безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=1000$

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц для задач газовой динамики. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. - мат. наук. – М.: МФТИ, 1970. – 183 с.
2. Yuri M. Davydov. Large-Particle Method. - In.: Encyclopaedia of Mathematics, vol.5. - Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers, 1990, p.p. 358-360.
3. Давыдов Ю.М., Чечейбаев Б., Давыдова И.М. и др. Исследование актуальных проблем механики и машиностроения. /Под ред. Ю.М. Давыдова, в 5-ти томах. – М.: НАПН РФ, 1995. - 1658 с.
4. Акжолов М.Ж., Мадера А.Г., Сотников А.Н. Численные методы решения задач математической физики на высокопроизводительном вычислительном комплексе МСЦ в режиме удаленного доступа. – М.: Московский гос. ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 2005. – 64 с.

УДК 624

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЕВОБЕРЕЖНОГО СКЛОНА ТОКТОГУЛЬСКОЙ ГЭС

А.С.Сыдыкова, К.Тилегенов, Б.Э.Эмильбеков

ИГиОН НАН КР

ИГОН НАН КР проводит наблюдения за деформациями и смещениями потенциально обвалоопасного блока 46-R-7, расположенного в левобережном склоне на участке основных сооружений Токтогульской ГЭС, начиная с 1970 г.. Он примыкает к левому борту плотины и расположен над машинным залом и зданием гидроэлектростанции. Высота блока около 250 м, угол наклона 70°. Выявление и оценка его предрасположенности к сползанию или обрушению имеет исключительно важное значение с точки зрения обеспечения безаварийной эксплуатации КТГЭС, а также выбора экономически целесообразных мероприятий по повышению устойчивости склона.

Для мониторинга смещений блока используются высокочувствительные деформографы и гидростатические нивелиры, разработанные для регистрации современных движений земной коры [1]. Они расположены в специально оборудованных наблюдательных станциях в геологических штольнях левобережного склона. Чувствительность около 10^{-7} мкм/м.

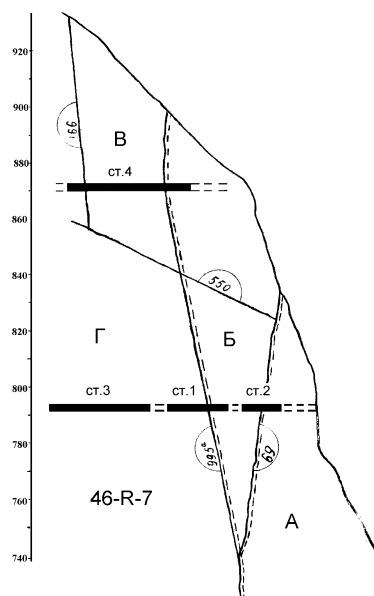


Рис. 1. Основные кинематические элементы массива 46-R-7 и расположение наблюдательных станций.

Блок 46-R-7 представляет собой возможную призму обрушения, состоящую из подвижного клина **Б**, подверженного сжатию силой собственной тяжести и отделенного от основного массива зияющей тектонической трещиной 995, подпорной стенки **А**, отделенной от подвижного блока трещиной бортового отпора 69 и испытывающей нагрузку от давления клина **Б** и собственного веса и призмы обрушения **В**, отчлененной от ненарушенного массива **Г** крутопадающей трещиной 166 и полого падающей трещиной 550 по которой возможно сползание или обрушение блока. Особую опасность представляет совместное обрушение блоков **А**, **Б** и **В** в виде призмы обрушения, возможность которого возникает при условии появления поверхности скольжения в основании подпорной стенки **А**.

Трещины являются естественными плоскостями ослабления, по которым будут развиваться необратимые деформации, характер развития которых зависит от характеристик контактов, физико-

механических и реологических свойств заполнителей трещин. Знание закономерностей развития деформаций по крупным трещинам и их связи с влияющими факторами имеет первостепенное значение при оценке устойчивости склонов. Поэтому наблюдательные станции приурочены к крупным трещинам.

Наблюдательная станция №1 располагается на отметке 814 метров. Деформограф и гидростатические нивелиры длиной 11 м пересекающие тектонические трещины с боковым отпором 995 и 995а (угол падения 60-80°) почти под прямым углом. Смещения по этим трещинам регистрируются также на наблюдательной станции №4, расположенной на отметке 870 м. Поэтому при необратимых смещениях блока 46-R-7 как целого вдоль трещин 995 и 995а регистрируемые на этих станциях абсолютные перемещения должны быть близкими по величине.

Наблюдательная станция №2 находится на отметке 814 м в зоне влияния тектонической трещины 69 3-го порядка. На станции №2 установлены параллельно два штанговых деформографа с измерительной базой 11 м и 3 м, пересекающих трещину. Такая комбинация из двух деформографов позволяет контролировать смещения по трещине и деформации пород в зоне влияния трещины. Параллельно деформографам для измерения вертикальной компоненты смещений по трещине 69 установлены гидростатические нивелиры, имеющие измерительную базу 5,5 метра.

Наблюдательная станция №3, расположена в относительно ненарушенном массиве, представленном породами 4 группы сохранности, не содержащем крупных трещин. Параллельно установлены гидростатические нивелиры длиной 24 м и два штанговых деформографа длиной 26 м. Таким образом, показания станции №3 это естественное поведение ненарушенного массива (склона). Смещения блока 46-R-7 или его частей **А**, **Б** и **В**

относительно ненарушенного массива выявляются как разность между зарегистрированными деформациями станций №1, №2, №3 и деформациями ненарушенного естественного массива станции №3.

Деформационный мониторинг основан на том факте, что катастрофическому (быстрому) обрушению больших масс массивов предшествуют многочисленные процессы микродеформаций. Деформации горных склонов развиваются постепенно, и до появления видимых признаков на протяжении длительного времени происходит предварительный процесс разрушения склона (скрытый процесс деформаций), который заканчивается с появлением трещин, самыми опасными из которых являются разрывные. Для блока 46-R-7 трещины бортового отпора 995 и 995а являются трещинами отрыва, поэтому устойчивость блока существенно зависит от того, имеется ли разрывная поверхность скольжения в основании подпорной стенки А.

Результаты долговременных наблюдений (1970-1991 гг.), полученные на четырех наблюдательных станциях левобережного склона в виде временных рядов с шагом по времени один месяц, позволили представить закономерности и динамику развития деформаций склонов /1/. Установлено, что в склонах, в результате развития необратимых деформаций, происходит смещение массива пород в сторону свободной поверхности. При общем медленном движении всего склона в сторону долины реки имеют место более интенсивные локальные движения отдельных блоков. Скорости смещений массивов горных пород возрастают по мере приближения к дневной поверхности, т.е. в зоне разуплотнения пород. На основе анализа скоростей необратимых деформаций был предложен критерий устойчивости блока, согласно которому блок 46-R-7 находится в естественном устойчивом состоянии, если скорости необратимых деформаций не превышают 10^{-4} 1/год. Детальный совместный анализ перемещений, регистрируемых на всех станциях,

затруднен из-за дополнительного влияния сжимающих тектонических напряжений, в результате чего часть станций регистрирует горизонтальное сжатие. Таким образом, выявить наличие поверхности скольжения в основании подпорной стенки **А** из имеющихся данных затруднительно, в связи с нестационарным поведением временных рядов, значительной помехой сезонной компоненты, а также влиянием тектонических процессов, которые в настоящее время оцениваются горизонтальными деформациями сжатия величиной 10^{-6} .

В настоящей работе предлагается косвенный прием оценки существования разрывной поверхности скольжения в основании наблюдаемого блока. Известно немало примеров, когда в результате землетрясения в горных склонах возникали крупные трещины, а также обвалы и оползни значительных объемов пород [1], т.е. землетрясения нередко способствуют смещению уже подготовленных к обрушению массивов пород.. Рассматривая физическую природу причин оползневых движений при землетрясениях, следует указать, что при катастрофических землетрясениях ускорения колебаний создают в потенциально-неустойчивых массивах горных склонов инерционные силы. Величины их могут оказаться критическими и вызвать смещение горных пород по плоскостям ослаблений под действием гравитационных сил. Кроме того, под влиянием землетрясений снижается коэффициент трения и сцепления пород вследствие нарушения связей и первоначальной структуры пород.

Таким образом, предполагается, что в результате сильного землетрясения, в случае наличия поверхности скольжения в основании блока, будут зарегистрированы согласованные и близкие по величине перемещения в горизонтальном и вертикальном направлениях. В первую очередь это относится к станциям №1 и №4, регистрирующих движения на отрывной трещине 995. Если же блок не

перемещается как целое, то наблюдаемые деформации будут разрозненными как по направлениям, так и по станциям.

Для примера приведем результаты, полученные при крупных промышленных взрывах 1971-1972 гг., выполненных вблизи и в самом блоке /1/. На станциях №2 и №3, т.е. по трещине 69 и в ненарушенном массиве, остаточные смещения незначительны. По данным станций №1 и №4 зарегистрированы значительные необратимые вертикальные смещения, горизонтальные меньше по величине и совместное перемещение блока по вертикали и горизонтали совпадает с направлением трещины 995. Поэтому можно считать, что разрывной трещины в основании подпорной стенки нет.

Мы сочли необходимым включить в рассмотрение влияние двух самых сильных землетрясений, произошедших непосредственной близости от Токтогульской ГЭС – Кочкор-Атинского (15 мая 1992 г силой 7-8 баллов в эпицентре) и Сусамырского (19 августа 1992 г силой 9 баллов). Интенсивность этих землетрясений в районе Токтогульской ГЭС соответственно оценивается в 4 и 7 баллов.

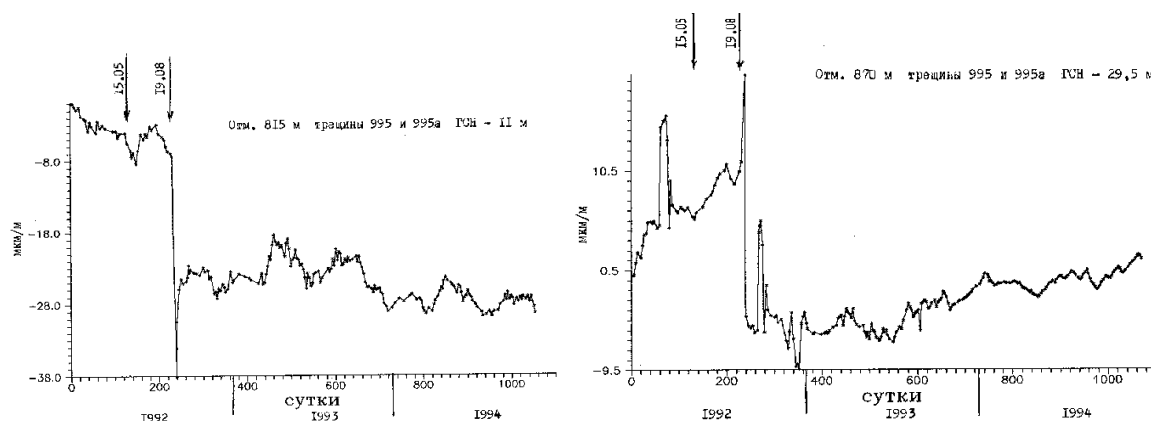


Рис.2. Вертикальные смещения по тр. 995 на отметках 815 м. и 870 м.

Полная сводка результатов приведена в /2/. Как и в случае промышленных взрывов, наблюдательные станции №2 и №3 не зарегистрировали заметного влияния землетрясений. Это же относится и к горизонтальным деформациям станций №1 и №4.

Вертикальные смещения по трещинам 995 и 995а на отметках 815 м и 870 м, зарегистрированные на станциях №2 и №4, представлены на рис 2. Величины остаточных вертикальных смещений соответственно равны 0,30 (отм. 815 м) и 0,45 мм (отм. 870 м). Как видно на приведенных рисунках, после резких смещений по трещинам в результате Сусамырского землетрясения вертикальные смещения в последующий период полностью стабилизировались. Величина этих смещений и затухающий характер их развития после землетрясения позволяет констатировать, что состояние устойчивости склонов в результате землетрясений не нарушилось.

Отсутствие взаимосвязи вертикальных и горизонтальных необратимых смещений косвенно указывает на отсутствие разрывной поверхности скольжения в основании обвалоопасного блока 46-R-7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов В.Я. Механика горных склонов. Бишкек: Илим, 1992. 192с.
2. Исследование деформационных процессов в горных склонах и разработка методов прогноза устойчивости массивов пород в районах интенсивных техногенных воздействий. Отчет 1994 г., Фонды ИГОН НАН КР.

УДК 533 (075.8), 519.6

**ОБ АЛГОРИТМЕ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ РАСЧЕТА
СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В РАМКАХ МОДЕЛИ
НАВЬЕ-СТОКСА В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ
И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЙ**

А.Б. Чечейбаев, Б. Чечейбаев, Н.Т. Эстебесова

Университет Центральной Азии, КГНУ им. Баласагына

Расчет вязких течений газа в рамках уравнений Навье-Стокса является эволюционной задачей математической физики [1]. Как известно, уравнения Навье-Стокса выводятся в предположении прямой пропорциональности тензора напряжений и тензора скоростей деформаций и справедливы для потоков со значительной вязкостью [1, 2 и др.]. Вместе с этим, в отличие от уравнений Эйлера для идеального газа, уравнения Навье-Стокса предъявляют высокие требования к мощности современных ЭВМ.

Одним из ярких методов современного вычислительного эксперимента является метод крупных частиц (МКЧ), разработанный крупным российским ученым, Почетным Академиком НАН Кыргызской Республики, Ю.М.Давыдовым [1, 2, 3 и др.]. С помощью данного метода успешно решаются сложные задачи гидродинамики, физики плазмы, механики экологии, машиностроения, механики сыпучих сред и др.

Рассмотрим задачу о расчете с помощью МКЧ течений вязкого теплопроводного газа в рамках уравнений Навье-Стокса. В случае

двумерной декартовой системы координат дифференциальная форма уравнений Навье-Стокса для расчета вязких сжимаемых течений газа состоит из уравнений неразрывности, импульса и энергии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E}{\partial x} + \frac{\partial \rho v E}{\partial y} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot u + \right. \\ \left. + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) v + \mu \frac{\partial}{\partial x} (B \cdot J + u^2) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) v + \right. \\ \left. + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) u + \mu \frac{\partial}{\partial y} (B \cdot J + v^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

где μ - первый коэффициент вязкости, $\lambda = A \cdot \mu$ - второй коэффициент вязкости, для элементарной модели одноатомного газа принимаем, что $A = -\frac{2}{3}$; $B = \frac{\gamma}{Pr}$, Pr - число Прандтля; $E = J + \frac{1}{2} \cdot (u^2 + v^2)$. Здесь ρ , u , v , J , E , p - плотность, горизонтальная составляющая вектора скорости, вертикальная составляющая вектора скорости, удельная внутренняя энергия, удельная полная энергия и давление газа соответственно.

Для расчета динамической вязкости μ часто используется формула Сазерленда [2]:

$$\mu = \mu_0 \cdot \frac{T_0 + C}{T + C} \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (5)$$

μ - вязкость газа при температуре газа T , μ_0 - вязкость газа при температуре газа T_0 , C - постоянная Сазерленда. Для воздуха постоянные в уравнении (5) выглядят так: $C = 120 \text{ K}^0$, $T_0 = 291,15 \text{ K}^0$, $\mu_0 = 18,27 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$.

В данной работе будем пренебрегать изменением вязкости. Систему уравнений (1) - (4) будем расщеплять методом крупных

частиц [1]. На эйлеровом этапе, пренебрегая дивергентными членами в системе (1) - (4), получаем следующую систему уравнений в частных производных:

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left[(A+2) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A+1) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right], \quad (6)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left[(A+2) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A+1) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right], \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = & -\frac{\partial p u}{\partial x} - \frac{\partial p v}{\partial y} + \mu \left[(A+2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B \left(\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Перепишем уравнение энергии (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = & -\frac{\partial p u}{\partial x} - \frac{\partial p v}{\partial y} + \mu \left\{ (A+2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + A \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \right. \\ & \left. B \left(\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда, заменяя в уравнениях (6), (7), (9) производные по времени и пространству соответствующими конечными разностями, получаем явные схемы эйлерова этапа метода крупных частиц. В методе крупных частиц для аппроксимации производных используются следующие конечные разности:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t}, \quad \Psi = \{u, v, E\} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x}, \quad \Psi = \{u, v, p, p u\} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y}, \quad \Psi = \{u, v, p, p v\} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\Psi_{i+1,j}^n - 2 \cdot \Psi_{i,j}^n + \Psi_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2}, \quad \Psi = \{u, v, J\} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\Psi_{i,j+1}^n - 2 \cdot \Psi_{i,j}^n + \Psi_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2}, \quad \Psi = \{u, v, J\} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\Psi_{i+1,j+1}^n - \Psi_{i-1,j+1}^n - \Psi_{i+1,j-1}^n + \Psi_{i-1,j-1}^n}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y}, \quad \Psi = \{u, v\} \quad (16)$$

На эйлеровом этапе метода крупных частиц определяются промежуточные значения для энергии и составляющих вектора скорости.

На лагранжевом этапе МКЧ определяются потоки масс $\Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n, \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n, \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n, \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ через границы эйлеровых ячеек за время Δt . При расчете потоков масс целесообразнее использовать разностные формулы первого порядка точности.

На заключительном этапе МКЧ определяются новые значения величин плотности, скорости и удельной полной энергии:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\sum \Delta M_k}{\Delta x \cdot \Delta y} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x \cdot \Delta y}, \quad (17)$$

$$X_{i,j}^{n+1} = \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} \tilde{X}_{i,j}^n + \frac{\tilde{X}_{i-1,j}^n \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \tilde{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \tilde{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \tilde{X}_{i,j+1}^n \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y}, \quad (18)$$

где $X = \{u, v, E\}$.

Рассмотрим теперь общую формулу для расчета уравнений движения вязкого теплопроводного газа в рамках гидродинамической модели Навье-Стокса [5, 6]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \Pi_{i,j}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \vec{V}) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} + \nabla \cdot (I, \quad (21)$$

где $\vec{q}$ – вектор плотности теплового потока, $\vec{f}$ – сила, отнесенная к единичной массе, $\Pi_{i,j}$ – составляющие тензора напряжений.

Переходя к цилиндрическим координатам, в случае осесимметричного потока получаем следующую систему уравнений:

$$r \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho \cdot v) = 0, \quad (22)$$

$$r \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot u^2 - r \cdot \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho \cdot u \cdot v - r \cdot \tau_{rz}) + \tau_{\varphi\varphi} + r, \quad (23)$$

$$r \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot u \cdot v - r \cdot \tau_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho \cdot v^2 - r \cdot \tau_{zz}) + r \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (24)$$

$$r \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot u \cdot e - r \cdot q_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho \cdot v \cdot e - r \cdot q_z) +$$

$$+p \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot v) \right] = r \frac{d}{dt}, \quad (25)$$

где $p = (\gamma - 1) \cdot \dots$, $0.5 \leq$

$\Phi = \frac{\mu}{Re_{\infty}} \cdot \left\{ \frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\}$ – диссипативная функция;

Здесь составляющие тензора напряжений и компоненты вектора теплового потока рассчитываются так:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \frac{\mu}{Re_{\infty}} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right), & \tau_{zz} &= \frac{\mu}{Re_{\infty}} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \tau_{\varphi\varphi} &= \frac{\mu}{Re_{\infty}} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{u}{r} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right), & \tau_{rz} &= \frac{\mu}{Re_{\infty}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

$$q_r = \frac{\gamma}{Pr}, \quad q_z = \frac{\gamma}{Pr}, \quad (27)$$

Соотношения для безразмерных коэффициентов – чисел Рейнольдса и Прандтля выглядят так: $Re_{\infty} = \dots$, $Pr = \dots$

где $\dots$ – отношение коэффициентов теплоемкостей газа при постоянном давлении и объеме. Для воздуха обычно принимается, что $\gamma = \dots$

Для решения системы (22) - (25) методом крупных частиц необходимо провести ее расщепление на две отдельные системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0, \quad (26)$$

$$r \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot (\tau_{rr})_1) - \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot (\tau_{rz})_1) + (\tau_{\varphi\varphi})_1 + r \frac{\partial p_1}{\partial r} = 0, \quad (27)$$

$$r \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot (\tau_{rz})_1) - \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot (\tau_{zz})_1) + r \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0, \quad (28)$$

$$r \rho_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot (q_r)_1) - \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot (q_z)_1) + p_1 \left[\frac{\partial}{\partial r} (r u_1) + \frac{\partial}{\partial z} (r v_1) \right] = r \frac{dQ_1}{dt} + r \Phi_1 \quad (29)$$

$$r \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho_1 \cdot u_1) = 0, \quad (30)$$

$$r \frac{\partial (\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho_1 \cdot (u_1)^2) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho_1 \cdot u_1 \cdot v_1) = 0, \quad (31)$$

$$r \frac{\partial (\rho_2 v_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho_1 \cdot u_1 \cdot v_1) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho_1 \cdot (v_1)^2) = 0, \quad (32)$$

$$r \frac{\partial(\rho_2 \varepsilon_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho_1 \cdot u_1 \cdot e_1) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho_1 \cdot v_1 \cdot e_1) = 0 \quad (33)$$

На эйлеровом этапе метода крупных частиц решается система уравнений (26) – (29). При аппроксимации данной системы разностными схемами используются элементарные разности (10) – (12).

Далее, на промежуточном и лагранжевом этапах, используя найденные на эйлеровом этапе распределения для ρ , u , v , в системе (30) – (33), аналогично случаю решения системы уравнений (1) – (4), определяем новые распределения плотности, скорости и энергии для следующего момента времени $t = t + \Delta t$.

Авторами данной статьи в настоящее время проводится программная реализация метода крупных частиц на М-языке системы программирования MATLAB для проведения расчетов движения теплопроводного газа в рамках уравнений Навье-Стокса в случае декартовой и цилиндрической систем координат.

В случае декартовой системы координат проводится расчет обтекания вязким газом двух прямоугольных препятствий - задачи, актуальной для оценки проветривания воздухом различных жилищных зданий.

В случае цилиндрической геометрии проводится расчет динамики вязкого теплопроводного газа внутри цилиндрической трубы - задачи, актуальной для проблем трубопроводной транспортировки газа.

Результаты проведенных численных расчетов будут опубликованы в следующих работах авторов данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. - М.: Наука, 1982. - 392 с.

2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1987.-840 с.
3. Давыдов Ю.М. Крупных частиц метод. – В кн.: Математическая энциклопедия. Т. 3. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – С. 125-129.
4. Yuri M. Davydov. Large-Particle Method. - In.: Encyclopaedia of Mathematics, vol.5. -Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers, 1990, p.p. 358-360.
5. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1: пер. С англ. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
6. Шайдуров В.В., Щепановская Г.И. Математическое моделирование нестационарного распространения импульса энергии большой мощности в вязком теплопроводном газе // Вычислительные технологии. - 2001. - Т. 6. - Ч. 2. - Спец. выпуск. - С. 693–698.

УДК 532.546

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ИЗМЕНЕНИЯ ГЛУБИНЫ ОПОЛЗНЕВОГО ГОРНОГО СКЛОНА

Турсунова Б.К., Токтогулова А.Ш., Орозобекова А.К

КГУСТА им. Н. Исанова, КГТУ им. И. Раззакова

В последние годы на территории Кыргызстана, широкое развитие получили оползневые процессы, причем, в основном происходят такие формы оползневых явлений, как оползни течения, оползни гидродинамического разрушения и оползни внезапного разжижения. Анализ показывает, что геологические условия и рельеф местности являются необходимым условием возникновения оползневых процессов. Здесь, кроме необходимого условия формирования этих трех типов оползневых явлений, первостепенное значение имеют такие достаточные условия, как гидрогеологические и метеорологические процессы, под действием которых происходят перемещения оползней, их можно объединить и назвать гидрометеорологическими условиями. А вышеуказанные три формы оползневых процессов, которые производят перемещения под действием гидрометеорологических условий будем называть «оползнями гидродинамического происхождения».

Изучение оползней гидродинамического происхождения и борьба с ними имеют важное народнохозяйственное значение, и привлекает внимание большого круга специалистов.

Шайдеггер А.Е., детально анализирующий процессы формирования склонов (в том числе и горных склонов) водными потоками, указывал, что «...если склон состоит из тех же пород, частицы которых переносит по нему вода, тогда в первом приближении процесс формирования склона определяется зависимостью между скоростью течения, и транспортирующей способностью потока. Если поток несет меньше наносов (мелких частиц), чем позволяет его транспортирующая способность, то он будет добирать их с нижележащих участков склона и тем самым эродировать (размывать и разрушать) склон».

Далее, он отмечает, что скорость движения твердых частиц пропорциональна уклону ($\frac{\partial h}{\partial x}$), а отложение наносов пропорционально градиенту скорости движения твердых частиц.

Данный процесс А.Е. Шайдеггер описывает следующим дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (1)$$

Здесь h - глубина потока; a - произвольная постоянная.

Вслед за А. Е. Шайдеггером, А. С. Девдариани, а также А.М. Трофимов, В.М. Московкин и другие, считают, что в общем виде коэффициент a является функцией от расстояния: $a = a(x)$ и ими же дано решение одной краевой задачи:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_0 x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (2)$$

со следующими граничными и начальными условиями:

$$h(l; t) = 0; \quad h(x; 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l,$$

данная краевая задача соответствует случаю развития склона под действием плоскостного смыва (когда при выпадении на склон осадков расход воды возрастает линейно вниз по склону).

Используем данный подход исследования для изучения изменения глубины оползневого потока. При этом выдвигаются следующие модели функций изменения глубины оползневого потока, представленные в виде начально-краевых задач:

$$I. \quad \frac{\partial h}{\partial t} = ax^k \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad \text{где } k = 0; 1 \quad (3)$$

при следующих начальных и краевых условиях:

а) начальные условия:

$$\text{при } t = t_0, \quad h(x; t_0) = h(x) \quad (4)$$

б) граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } x = x_0 = 0, \quad h(0; t) &= q \\ \text{при } x = x_n, \quad h(x_n; t) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Следует отметить, что при $k = 0$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (5a)$$

а при $k = 1$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = ax \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (5б)$$

Для решения уравнения (3) с краевыми условиями (4) и (5) применяем метод нахождения автомодельных решений дифференциальных уравнений. Решение будем искать в автомодельной форме:

$$h(x; t) = x^n f(z), \quad (6)$$

здесь $z = \frac{t}{x^2}$, при $k=0$ и $z = \frac{t}{x}$ при $k=1$, n - показатель автомодельности.

Подставляя данное решение в уравнение (3) и после ряда преобразований получим:

$$z^2 f''(z) + (m_0 + a_0 z) f'(z) + b_0 f(z) = 0 \quad (7)$$

Здесь:

1) при $k=0$; $(z = \frac{t}{x^2})$;

$$a_0 = -\frac{1}{2}(2n-3); \quad b_0 = \frac{1}{4}n(n-1); \quad m_0 = -\frac{1}{4a}; \quad (8)$$

2) при $k=1$ $(z = \frac{t}{x})$;

$$a_0 = 2(1-n); \quad b_0 = n(n-1), \quad m_0 = -\frac{1}{a} \quad (9)$$

С целью преобразования решение уравнения (17) ищем в виде:

$$f(z) = e^{-\xi} \xi^\nu \nu(\xi), \quad \text{где} \quad \xi = z^{-1} \quad (10)$$

тогда получим:

$$\xi^2 \eta''(\xi) + [2\nu + 2 - a_0 - (2 + m_0)\xi] \xi \cdot \eta'(\xi) + \\ + [(1 + m_0)\xi - 2\nu - 2 + a_0 - m_0\nu] \xi + [\nu^2 + (1 - a_0)\nu + b_0] \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (11)$$

Отсюда, допускаем, что выполнялось соотношение:

$$\nu^2 + (1 - a_0)\nu + b_0 = 0 \quad (12)$$

Решением данного уравнения являются следующие (где учитываются (8) и (9)) выражения:

$$1) \text{ при } k=0; (z = \frac{t}{x^2}); \quad \nu_1 = \frac{1-n}{2}, \quad \nu_2 = -\frac{n}{2} \quad (13)$$

$$2) \text{ при } k=1; (z = \frac{t}{x}); \quad \nu_1 = 1-n; \quad \nu_2 = -n$$

(14)

Согласно соотношению (12), уравнение (11) примет вид:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + [2\nu + 2 - a_0 - (2 + m_0)\xi] \cdot \eta'(\xi) + \\ + [(1 + m_0)\xi - (2\nu + 2 - a_0 + m\nu)] \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (15)$$

Уравнение (15) при $m_0 = -1$ (или то же самое, что $a = \frac{1}{4}$, когда $k=0$ и $a = 1$, когда $k = 1$) приводится к уравнению следующего вида:

$$\xi \eta''(\xi) + [2\nu + 2 - a_0 - \xi] \cdot \eta'(\xi) - (\nu + 2 - a_0) \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (16)$$

Итак, мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Теперь, сопоставляя уравнение (16) с вырожденным гипергеометрическим уравнением:

$$x \cdot y''(x) + (c - x) \cdot y'(x) - a \cdot y(x) = 0 \quad (17)$$

имеем следующие два вида уравнения (16), которые имеют следующие формы:

1) при $k=0$ уравнение (1) примет вид (5а), тогда, согласно искомого решения (6) и преобразования (10), а также (8), уравнение (16) будет иметь вид:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + \left[2\nu + n + \frac{1}{2} - \xi \right] \cdot \eta'(\xi) - (\nu + n + \frac{1}{2}) \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (18)$$

или с учетом значения « ν » из соотношения (13) имеем:

а) при $\nu_1 = \frac{1-n}{2}$ получится:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + \left[\frac{3}{2} - \xi \right] \cdot \eta'(\xi) - \frac{n+2}{2} \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (19)$$

отсюда

$$\eta(\xi) = C_1 \cdot \Phi\left(\frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; \xi\right) + C_2 \cdot \xi^{-\frac{1}{2}} \Phi\left(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; \xi\right) \quad (20)$$

$$\left(\xi = \frac{x^2}{t}\right)$$

б) при $\nu_2 = -\frac{n}{2}$:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + \left[\frac{1}{2} - \xi \right] \cdot \eta'(\xi) - \frac{n+1}{2} \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (21)$$

отсюда

$$\eta(\xi) = C_1 \cdot \Phi\left(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; \xi\right) + C_2 \cdot \xi^{\frac{1}{2}} \Phi\left(\frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; \xi\right) \quad (22)$$

$$(\xi = \frac{x^2}{t})$$

Теперь будем учитывать соотношение (10) и получим:

$$1. \text{ при } \nu_1 = \frac{1-n}{2}$$

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} z^{\frac{n}{2}} (C_{01} z^{-\frac{1}{2}} \cdot \Phi(\frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; z^{-1}) + C_{02} \Phi(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; z^{-1})) \quad (23)$$

$$2. \text{ при } \nu_2 = -\frac{n}{2} \text{ получится:}$$

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} z^{\frac{n}{2}} (C_{01} \cdot \Phi(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; z^{-1}) + C_{02} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \Phi(\frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; z^{-1})) \quad (24)$$

Таким образом, получены две формы решения в виде (23) и (24), сравнивая их между собою окончательно имеем:

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} z^{\frac{n}{2}} (C_1 z^{-\frac{1}{2}} \cdot \Phi(\frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; z^{-1}) + C_2 \Phi(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; z^{-1})), \quad z = \frac{t}{x^2} \quad (25)$$

Тогда согласно формуле (6) функция изменения глубины оползневого потока будет иметь вид:

$$h(x,t) = e^{-\frac{x^2}{t}} t^{\frac{n}{2}} (C_1 \cdot \Phi(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{t}) + C_2 \cdot \frac{x}{t^{\frac{1}{2}}} \Phi(\frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{t})) \quad (26)$$

Аналогично поступим и относительно второго уравнения:

2) при $k=1$, уравнение (3) примет вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (5 б)$$

Отсюда на основании формулы (6) и преобразования (10) с учетом соотношения (9) получим:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + [2\nu + 2n - \xi] \cdot \eta'(\xi) - (\nu + 2n) \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (27)$$

Теперь с учетом значения « ν » из формулы (14) будем иметь следующее:

а) $\nu_1 = 1 - n$, тогда уравнение (27) примет вид:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + [2 - \xi] \cdot \eta'(\xi) - (n + 1) \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (28)$$

При этом решением уравнения (28) будет

$$\eta(\xi) = C_1 \cdot \Phi(n+1; 2; \xi) \quad (29)$$

Здесь второе независимое решение содержит логарифмические члены, поэтому достаточно иметь одно решение данного гипергеометрического уравнения (28). И в этом случае будет одно единственное решение в виде (29), тогда имеем:

$$f(z) = C_1 e^{-\frac{1}{z}} z^{n-1} \Phi(n+1; 2; z^{-1}) \quad , \quad z = \frac{t}{x} \quad (30)$$

или нетрудно получить:

$$h(x; t) = C_1 e^{-\frac{x}{t}} x \cdot t^{n-1} \Phi(n+1; 2; \frac{x}{t}) \quad (31)$$

б) $v_2 = -n$, тогда из уравнения (27) получим: $2v + 2n = 0$ и $v + 2n = n$,

При этом здесь

$$\Phi_1(n; 0; \xi) \text{ и } \Phi_2(\xi) = \xi \Phi(n+1; 2; \xi),$$

тогда решением гипергеометрического уравнения (27) будет следующее.

При $v_1 = -n$ будет иметь вид:

$$\eta(\xi) = C_0 \xi \cdot \Phi(n+1; 2; \xi),$$

в этом случае имеем

$$f(z) = C_0 e^{-\frac{1}{z}} z^{n-1} \Phi(n+1; 2; z^{-1})$$

такого же вида, что и (2.40). Поэтому, решением уравнения (6) является (31).

$$\text{II. } \frac{\partial h}{\partial t} = (ax^2 + bx + c)^s \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (32)$$

при следующих начально-краевых условиях:

а) начальные условия:

при $t = t_0$

$$h(x; t_0) = h_0(x) \quad (33)$$

б) граничные условия:

$$\text{при } x = x_0 = 0, \quad h(0; t) = q,$$

$$\text{при } x = x_n, \quad h(x_n; t) = 0 \quad (34)$$

Решения уравнения (32) с начально-краевыми условиями (33) и (34) будем представлять в автомодельной форме следующего вида:

$$h(x; t) = (ax^2 + bx + c)^n \cdot f(z), \quad z = \frac{t}{(2ax + b)^m} \quad (35)$$

n — показатель автомодельности, a, b, c — произвольные постоянные.

Подставляя данное решение (35) в уравнение (32) после ряда преобразований получим:

$$z^2 f''(z) + (a_0 + b_0 z) \cdot f'(z) + c_0 f(z) = 0 \quad (36)$$

здесь

$$a_0 = -\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}, \quad b_0 = -2(2n-1); \quad c_0 = 2n(2n-1) \quad (37)$$

при этом допустим, что $s = 1/2$ и $m = 1$

Для дальнейшего упрощения полагаем:

$$f(z) = e^{-y} y^{-\nu} \cdot \eta(y); \quad y = z^{-1} \quad (38)$$

тогда получаем:

$$y^2 \eta''(y) + [2(\nu+1) - b_0 - (a_0 + 2) \cdot y] \cdot y \cdot \eta'(y) + [\nu(\nu+1) - b_0 \nu + c_0 + (1 + a_0) \cdot y^2 + (b_0 - 2\nu - 2 - a_0 \nu) \cdot y] \cdot \eta(y) = 0 \quad (39)$$

Предположим, что выполнялось соотношение:

$$\nu \cdot (\nu + 1) - b_0 \cdot \nu + c_0 = 0 \quad (40)$$

Решениями уравнения являются следующие:

$$\nu_{1,2} = -\frac{1-b_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(1-b_0)^2}{4} - c_0\right)}$$

или с учетом соотношения (37) имеем:

$$\nu_1 = 1 - 2n, \quad \nu_2 = -2n; \quad (41)$$

Далее, на основании (40) уравнение (39) преобразуется в форме:

$$y\eta''(y) + [2(\nu + 1) - b_0 - (a_0 + 2) \cdot y] \cdot \eta'(y) + [(1 + a_0) \cdot y + b_0 - 2\nu - 2 - a_0 \cdot \nu] \cdot \eta(y) = 0 \quad (42)$$

Допустим, что $a_0 = \frac{-1}{2a^{\frac{3}{2}}} = -1$ или $a^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$, тогда уравнение (42) примет

следующий вид:

$$y\eta''(y) + [2(\nu + 1) - b_0 - y] \cdot \eta'(y) - (\nu + 2 - b_0) \cdot \eta(y) = 0 \quad (43)$$

Таким образом, нами получено вырожденное гипергеометрическое уравнение, решениями которого являются вырожденные гипергеометрические функции, одно из которых имеет следующую форму:

$$\eta_1(y) = \phi(\alpha, \beta, y)$$

Тогда при $\nu_1 = 1 - 2n$ имеем

$$\eta(y) = c_1 \phi(2n + 1; 2; y) \quad (44)$$

Второе независимое решение выражается через логарифмическое выражение, поэтому его не будем рассматривать. Согласно формуле (38) получим:

$$f(z) = c_1 e^{-\frac{1}{z}} z^{2n-1} \phi(2n + 1; 2; z^{-1}) \quad (45)$$

при $\nu_2 = -2n$ получится: $\alpha = 2n$; $\beta = 0$, при этом также имеется только одно независимое решение в форме

$$\eta(y) = c_2 y^{1-\beta} \phi(\alpha - \beta + 1; 2 - \beta; y)$$

или

$$\eta(y) = c_2 y \phi(2n + 1; 2; y) \quad (46)$$

Здесь также на основании формулы (1.48) имеем:

$$f(z) = c_2 e^{-\frac{1}{z}} z^{2n-1} \phi(2n+1; 2; y) \quad (47)$$

Итак, окончательно получится одно независимое решение в виде:

$$f(z) = c_1 e^{-\frac{1}{z}} z^{2n-1} \phi(2n+1; 2; y) \quad (48)$$

Тогда согласно формуле функция изменения глубины оползневого потока будет иметь вид:

$$h(x, t) = c_0 t^{2n-1} \cdot (2ax + b) \cdot e^{-\frac{2ax+b}{t}} \phi(2n+1; 2; \frac{2ax+b}{t}) \quad (49)$$

Таким образом, мы формы изменений глубины оползневого потока. Отсюда следует, что изменение глубины оползневого потока связного типа имеют различные формы в зависимости от формы уравнения и значения показателя автомодельности « n ». Поэтому, задавая различные значения показателя автомодельности « n », мы получим различные формы для функций $f(z)$ и $h(x, t)$ для разных видов уравнений, описывающих изменение глубины оползневых потоков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оползни//БСЭ. 3-е изд. - М. 1974. - Т. 18. - С. 429-430
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. - М.: Изд-во физико-математической литературы, 1963. Т. 1. - 575 с.
3. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. -420 с.
4. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. - М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2001. — 608 с.

5. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов. М.: Изд-во МГУ, 1997. -178 с.
6. Емельянова Е.П. Основные закономерности оползневых процессов. М.: Недра, 1972.-308 с.
7. Численные методы в динамике жидкостей/Джеймсон Э., Мюллер Т., Боллха-уз У., Краус В., Шмидт В., Белоцерковский О.; ред. Вирц Г., Смолдерен Ж. М.: Мир, 1981.-407 с.
8. Шадунц К.Ш. Расчет скоростей движения оползней-потоков//Геологические факторы формирования оползней и селевых потоков и вопросы их оценки. — 1976. — С. 4-12
9. Шайдеггер А.Е. Теоретическая геоморфология. М.: Прогресс, 1964 г.
10. Бийбосунов А.И., Орозобекова А.К., Ташиев А.А. Механико-математическая модель глубины селевых потоков. Современные проблемы механики сплошных сред/ Гидрогазодинамика и экзогенно-геологические процессы природы. Б., 2004 г., с. 28-37

УДК 517.968

**ИССЛЕДОВАНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ И
ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЯМ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЧВЫ
ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ**

Р. Табышов, М.Ж.Нарматова, Ш.К. Шейшенова

НИИЭЭ при МЭ КР, ИСРиП

Как известно, в почве естественного сложения первопричинного процесса теплообмена является наблюдающийся всегда и повсеместно вертикальный температурный перепад меняющий знак от дня к ночи. Благодаря этому возникает процесс теплопроводности, обуславливающий обмен теплом внутри почвы между различными глубинами.

Для нахождения температурного поля в почве, где действуют основные факторы процесса, к которым относятся: кондуктивная теплопроводность, конвекция в порах почвы, излучения в порах, перенос влаги, является задачей исключительной сложности. Основным и эффективным средством, позволяющим обойти эти сложности и успешно решать многие практические задачи, может служить двумерная модель уравнения эквивалентной теплопроводности [1].

$$c(x, y, t) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, y, t) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(x, y, t) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (1)$$

Уравнение (1) является нелинейным двумерным дифференциальным уравнением теплопроводности и нахождение его решений довольно

сложно. Коэффициенты теплопроводности и теплоемкости имеют сложную зависимость от переменных x, y, t , а возможно и от самой функции T . Существуют различные виды экспериментальных зависимостей, а также линеаризация этих зависимостей [3].

Для исследования последнего нелинейного уравнения теплопроводности, подставив следующие начально-краевые условия:

$$\begin{cases} T(x, y, 0) = F_0(x, y), \\ T(0, y, t) = F_1(y, t), \\ T(H, y, t) = F_2(y, t) \end{cases} \quad (2)$$

При решении нелинейного уравнения (1), вся трудность заключалась именно в определении коэффициентов теплоемкости $c(x, y, t)$ и теплопроводности $\lambda(x, y, t)$, и как указано выше, они определялись из экспериментальных данных или, зная законы их изменения, приближенно вышеуказанные характеристики описывались определенными количественными зависимостями от x, y и t .

I. Пусть коэффициенты $c(x, y, t)$ и $\lambda(x, y, t)$ подчинены одинаковым законам изменения – экспоненциальным как:

$$c(x, y, t) = c_0 e^{\gamma T} \quad \lambda(x, y, t) = \lambda_0 e^{\gamma T} \quad (3)$$

тогда подставляя их в уравнения (1), после некоторых математических преобразований, получим следующее нелинейное уравнение:

$$T_\tau = T_{xx} + T_{yy} + \gamma(T_x^2 + T_y^2), \quad \text{где } \tau = \frac{\lambda_0}{c_0} t \quad (4)$$

Введем новую зависимую функцию в виде:

$$Q = \exp \gamma T \quad (5)$$

Определяя частные производные

$$\begin{aligned} Q_t &= \gamma e^{\gamma T} T_t, \quad Q_x = \gamma e^{\gamma T} T_x, \\ Q_{xx} &= \gamma e^{\gamma T} (\gamma T_x^2 + T_{xx}), \quad Q_y = \gamma e^{\gamma T} T_y, \quad Q_{yy} = \gamma e^{\gamma T} (\gamma T_y^2 + T_{yy}) \end{aligned}$$

и подставляя в (4), получим линейное уравнение в частных производных второго порядка:

$$Q_t = Q_{xx} + Q_{yy}, \quad (6)$$

1) Предположим, что уравнение (6) имеет решение в классической форме:

$$Q(x, y, \tau) = f_0(x)f_1(y)f_2(\tau) \quad (7)$$

Определяя частные производные и подставляя в исследуемое уравнение имеем следующее соотношение:

$$f_0(x)f_1(y)f_2'(\tau) = f_0''f_1(y)f_2(\tau) + f_0(x)f_1''(y)f_2(\tau) \quad (8)$$

Пусть $f_0(x) = \exp kx$, $f_2(y) = \exp my$ тогда разделяя уравнение (8) на произведение функций $f_0(x)f_1(y)$, получим:

$$f_2'(\tau) = (k^2 + m^2)f_2(\tau), \quad (9)$$

общим решением которого будет

$$f_2(\tau) = c_0 \exp(k^2 + m^2)\tau, \quad (10)$$

а сама искомая функция окончательно запишется следующим образом:

$$Q(x, y, \tau) = c_0 \exp kx \cdot \exp my \cdot \exp(k^2 + m^2)\tau \quad (11)$$

2) Предположим, что решение уравнения (6) можно искать в другой форме:

$$Q(x, y, \tau) = f_0(x)f_1(y)f_2(\eta), \quad \eta = x + y + c\tau - \text{плоская волна} \quad (12)$$

Определяя $Q_\tau, Q_x, Q_{xx}, Q_y, Q_{yy}$ и подставляя их в уравнение (6), получим дифференциальное уравнение, которое после деления на произведение $f_0(x) = \exp nx$, $f_2(\eta) = \exp \eta$, записывается в виде обыкновенного дифференциального уравнения:

$$f_1''(y) + (n^2 - c)p f_1(y) = 0 \quad (13)$$

где его решением будет $f_1(y) = c_0 \exp(\sqrt{(c - n^2)p})y + c_1 \exp(-\sqrt{(c - n^2)p})y$,

при этом сама искомая функция запишется:

$$Q(x, y, \tau) = \exp nx \cdot \exp p\eta \cdot [c_0 \exp(\sqrt{(c - n^2)p})y + c_1 \exp(-\sqrt{(c - n^2)p})y] \quad (14)$$

3) Теперь будем искать решение уравнения (6) в более сложном виде:

$$Q(x, y, \tau) = f_0(x)f_1(y)[f_2(\eta) + f_3(\tau)], \quad \eta = x + y + c\tau \quad (15)$$

Здесь также определяя все частные производные и подставляя в (6), имеем:

$$f_0 f_1 [cf_2' + f_3'] = f_0'' f_1 [f_2 + f_3] + 2f_0' f_1 f_2' + 2f_0 f_1 f_2'' + f_0 f_1'' [f_2 + f_3] + 2f_0 f_1' f_2' \quad (16)$$

Пусть $f_0(x) = \exp bx$, $f_1(y) = \exp ty$, тогда разделяя уравнение (16) на произведение функций $f_0(x)$, $f_1(y)$, получим систему из двух уравнений

$$\text{а) } f_3' - (b^2 + m^2)f_3 = 0, \quad \text{б) } f_2'' + (2m + 2b - c)f_2' + (b^2 + m^2)f_2 = 0$$

Из первого уравнения определим

$$f_3(\tau) = c_0 \exp(b^2 + m^2)\tau \quad (17)$$

Из второго уравнения, записанного в виде обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$2f_2'' + (2m + 2b - c)f_2' + (b^2 + m^2)f_2 = 0 \quad (18)$$

определим его решение, зная, что его характеристическое уравнение имеет корни вида

$$k_{1,2} = \frac{-(2m+2b-c) \pm \sqrt{(2m+2b-c)^2 - 8(b^2+m^2)}}{4} \quad (19)$$

Здесь возможны три случая:

а) корни действительны и различны, тогда общее решение имеет вид

$$f_2(\eta) = c_1 \exp k_1 \eta + c_2 \exp k_2 \eta \quad (20)$$

в этом случае искомая функция записывается как

$$Q(x, y, \tau) = \exp bx \cdot \exp ty \cdot [c_1 \exp k_1 \eta + c_2 \exp k_2 \eta + c_0 \exp(b^2 + m^2)\tau] \quad (21)$$

б) корни кратные, тогда

$$f_2(\eta) = (c_1 + c_2 \eta) \exp k \eta \quad (22)$$

а сама функция $Q(x, y, \tau)$ окончательно имеет вид

$$Q(x, y, \tau) = \exp bx \cdot \exp ty \cdot [(c_1 + c_2 \eta) \exp k \eta + c_0 \exp(b^2 + m^2)\tau] \quad (23)$$

в) корни комплексные, т.е. $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, тогда получим решение

$$f_2(\eta) = \exp \alpha \eta (c_1 \cos \beta \eta + c_2 \sin \beta \eta) \quad (24)$$

При этом искомая функция принимает вид

$$Q(x, y, \tau) = \exp bx \cdot \exp ty \cdot [\exp a\eta (c_1 \cos \beta \eta + c_2 \sin \beta \eta) + c_0 \exp(b^2 + m^2)\tau] \quad (25)$$

Предположим, что коэффициенты теплопроводности и теплоемкости, определенные из экстремальных данных могут быть записаны как

$$C(x, y, \tau) = c_0 T^n, \quad \lambda(x, y, \tau) = \lambda_0 T^m,$$

тогда уравнение (1) запишется в виде

$$T^{\tau-m+1} T_\tau = T(T_{xx} + T_{yy}) + m(T_x^2 + T_y^2) \quad (26)$$

Уравнение (26) будет нелинейным при любом $n \neq m$ а также если:

$$\text{а) } n < m \text{ на единицу} \quad T_\tau = TT_{xx} + TT_{yy} + 2(T_x^2 + T_y^2), n = 1, m = 2 \quad (27)$$

$$\text{б) } n > m \text{ на единицу} \quad T^2 T_\tau = TT_{xx} + TT_{yy} + T_x^2 + T_y^2, n = 2, m = 1 \quad (28)$$

в) при $n = m = 1$ уравнение может записаться в виде

$$TT_\tau = TT_{xx} + TT_{yy} + T_x^2 + T_y^2 \quad (29)$$

или с привлечением функции

$$Q(x, y, \tau) = T^2(x, y, \tau), \quad (30)$$

получим следующее линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$Q_\tau = Q_{xx} + Q_{yy}, \quad (31)$$

эквивалентное уравнению (6) по структуре, но неравное ему по значению.

Определим решение уравнения (31) в автомодельной форме (2)

$$Q(x, y, \tau) = \tau^n f(\xi), \quad \xi = -\frac{(x+y)^2}{8\tau} \quad (32)$$

Определяя частные производные: $Q_\tau = n \cdot \tau^{n-1} \cdot f(\xi) - \tau^{n-1} \cdot f' \cdot \xi$,

$$Q_{xx} = 4a\tau^{n-1}\xi f'' + 2a\tau^{n-1}f', \quad Q_{yy} = 4a\tau^{n-1}\xi f'' + 2a\tau^{n-1}f'$$

и подставляя в рассматриваемое уравнение (31), получим

$$\xi f'' + \left[\frac{1}{2} - \xi\right] f' + nf = 0, \quad (33)$$

которое является вырожденным гипергеометрическим уравнением Гаусса, имеющее два класса частных решений (2)

$$f(\xi) = c_1 F\left(-n; \frac{1}{2}; \xi\right) + c_2 \xi^{1/2} F\left(\frac{-2n+1}{2}; \frac{3}{2}; \xi\right) \quad (34)$$

где
$$F(\xi) = 1 - 2n\xi - \frac{2n(-n+1)}{3}\xi^2 + \dots + \frac{(-n+R-1)\xi^R}{\left(R - \frac{1}{2}\right)R!} + \dots$$

Это функция Похгаммера или вырожденная гипергеометрическая функция, представленная с помощью ряда, сходящегося при всех значениях ξ .

С учетом решения (32), общее решение имеет вид:

$$Q(x, y, \tau) = \tau^n \left[c_1 F\left(-n; \frac{1}{2}; \xi\right) + c_2 \xi^{1/2} F\left(\frac{-2n+1}{2}; \frac{3}{2}; \xi\right) \right] \quad (35)$$

Таким образом, рассмотренные два вида лидеризации уравнения (1), которые позволяют аналитически решить сложную задачу распространения тепла в почвогрунте с различными ее теплофизическими характеристиками. Сравнивая, полученные решения (35) с начально-краевыми условиями (2), если они будут записаны в явном виде, тогда можем определить постоянные интегрирования c_1, c_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Чудновский А.Ф. Теплообмен в дисперсных средах. Л., Гостехиздат 1954г, 444с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976г., 576с.
3. Куртнер Д.А., Решетин О.Л., Чудновский А.Ф. Решение уравнения теплопроводности при переменном коэффициенте переноса. // Сб. трудов по агроном. физике. 1970г., №26.-с.71-79.

УДК 532.546

ОДИН ИЗ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИНАМИКИ ОПОЛЗНЕВЫХ ПРОЦЕССОВ

Б.К. Турсунова., А.Ш.Токтогулова, Орозобекова А.К.

КГУСТА им. Н. Исанова, КГТУ им. И.Раззакова

Одной из самых серьёзных угроз из числа современных геологических процессов являются оползни. Эта проблема ещё будет усугубляться в будущем, в связи с быстро растущей численностью населения в горных странах, в том числе и Кыргызстане. С освоением новых территорий, большинство, которых требуют инженерной защиты от различных геологических процессов и, особенно от оползней.

Горная часть Кыргызстана характеризуется широким развитием оползней. Так, на склонах Чаткальского, Ферганского, Алайского хребтов площадь 9.2 км поражена современными оползнями, а на площади 11.5 км² возможно их развитие. Во многих бассейнах рек развитие оползней происходит в лёссовых породах. Наиболее оползнеопасные районы Кыргызстана включают бассейны рек Яссы, Кугарт, Чангет, Чаткал, Падыша-ата, Итагар, Западная Кара-суу, Майлу-суу, Кара-Ункур, Кара-Дарья, Ак-Буура, Гульча, Сюлюкта, Чаувай, Куршаб и Талдык. Только в районе Майлу-Суу на каждый квадратный километр площади приходится по 30 - 40 оползней. В результате оползней пострадали районы городов Майлу-суу, Сюлюкта, Кок-Жангак, Ташкумайир, помимо многочисленных

кишлаков в Узгенском, Алайском, Кара-Кулжикском, Сузакском и многих других районах. Оползневая угроза усугубляется наличием радиоактивных отходов в зоне оползней, что может обернуться экологической катастрофой, особенно учитывая их близость к густонаселенным районам Ферганской долины.

Оползни - скользящее смещение масс горных пород вниз по склону под влиянием силы тяжести. Оползни возникают в каком-либо участке склона или откоса вследствие нарушения равновесия пород, вызванного: увеличением крутизны склона в результате подмыва водой; ослаблением прочности пород при выветривании или переувлажнении осадками и подземными водами; воздействием сейсмических толчков; строительной и хозяйственной деятельностью, проводимой без учета геологических условий местности [1].

Под механизмом оползневого процесса следует понимать последовательную смену деформаций и перемещений во всех точках склона, в которых осуществляется возникновение оползня и его смещение.

В оползневом процессе можно выделить следующие элементарные процессы (типы или виды механизма): 1 - перекосящие составляющие склона элементов или связей между ними (сдвиг, изгиб, наклон, кручение, смятие); 2 - вязкое или пластичное течение, т.е. перемещение частиц горных пород относительно друг друга без нарушения их сплошности; 3 - хрупкое разрушение пород из-за несоответствия их прочности, действующих на них напряжений, заканчивающееся нарушением их сплошности; 4 - механическое перемещение - скольжение отделившихся в результате разрушения или свободно лежащих на склоне пород по подстилающим породам.

Основные методы получения информации о механизме оползневых процессов следующие: 1 - наблюдения по поверхностным и глубинным реперам, путём фиксации трещин, деформаций

сооружений и растительности; 2 - изучение следов деформаций, отражающихся на поверхности земли (съёмка) и в строении тела оползня (различные виды разведки); 3 - моделирование в лаборатории.

Существует большое разнообразие типов оползней в зависимости от комплекса природных факторов. Самыми распространенными среди них являются оползни-потоки (оползни-течения), которые встречаются практически на всем земном шаре. Оползневые процессы или оползни -потоки, которые произошли под действием гидрометеорологических условий будем называть "оползнями гидродинамического происхождения". По характеру движения они близки к движению некоторых типов селей и лавин и аналогичны течению жидкости в открытых каналах. Описание течения однородной жидкости в открытых наклонных руслах является одной из основных проблем гидравлики. Это нелинейный длинноволновой процесс, описываемый гиперболическими дифференциальными уравнениями. Как правило, длинноволновое приближение позволяет уменьшить размерность рассматриваемой задачи, а гиперболичность системы отражает основные свойства процессов передачи возмущений в потоке жидкости и конечность скорости их распространения.

Поэтому для описания движения оползней-потоков (и близких по характеру движения водных, снежных и селевых потоков) используются математические модели теории мелкой воды (или теории длинных волн) [2, 3, 4]. Теория длинных волн обычно применяется в достаточно важном для приложений случае, когда характерные горизонтальные масштабы волнового движения намного превосходят глубину слоя жидкости. Начало развития этой теории связано с нестационарными задачами гидравлики открытых русел. Оползневые процессы или оползни -потоки, которые произошли под

действием гидрометеорологических условий будем называть "оползнями гидродинамического происхождения".

Большое значение в создании математических методов анализа эволюции нелинейных длинных волн имела аналогия между уравнениями мелкой воды и уравнениями газовой динамики [4, 5, 6, 7]. В частности, это позволило применить понятие разрывного решения для описания таких явлений, как гидравлический прыжок и бор. Отметим, что данная аналогия также позволила для решения уравнений теории мелкой воды применить численные методики первоначально созданные для решения уравнений газовой динамики (схемы Лакса-Фридрихса, Мак-Кормака, Куранта-Изаксона-Риса, Роу, Ошера-Соломона, метод Годунова и многие другие) [5].

В работе рассматривается плоскопараллельное течение жидкости, позволяющее ограничиться изучением одномерной нестационарной задачи. Для моделирования движения оползня гидродинамического происхождения в качестве исходной взята модель уравнений однослойной мелкой воды, учитывающей турбулентное трение о дно, которая также использует осредненное по слою значение скорости. Соответствующие математические модели представляют собой начальные (начально-краевые) задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа. Очевидно, что общий метод исследования такого класса задач может быть только численным. В большинстве работ по численному моделированию рассматриваемых явлений применяются различные схемы конечно-разностных методов (схема Лакса-Вендроффа, схема Мак-Кормака) [4].

Сравнительно недавно появился ряд вычислительных схем, названных методом частиц (их называют также «безееточными» методами, методами подвижных конечных элементов, полностью лагранжевы методы, методы на неструктурированных сетках, методы

маркеров и так далее), которые применяются при численном моделировании процессов газовой динамики и гидродинамики [3-4]. Существуют также примеры применения метода частиц (наряду с конечно-разностными методами) в теории мелкой воды. Для получения числовых значений применяется метод приближенных решений.

Существуют различные методы численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. Широко известны три группы численных методов, изложение которых можно найти в современной технической литературе: метод конечных элементов, метод характеристик и метод конечных разностей. Метод конечных элементов не нашел широкого применения для решения нестационарных гидродинамических задач. Из выше перечисленных существующих методов метод конечных разностей в настоящее время используется наиболее чаще, чем другие методы. В методе конечных разностей производные функции заменяются конечными разностями. Таким образом, дифференциальные уравнения, описывающие изменение непрерывной среды, заменяют алгебраическими зависимостями в форме конечных разностей.

Грунтовая масса, с физической точки зрения, представляет собой дисперсную среду. Однако, при математическом рассмотрении механических явлений, возникающих в ней, может трактовать ее как соединение двух сплошных сред: твердой- со свойствами грунтового скелета и жидкой- со свойствами грунтовой воды. При таком рассмотрении динамика грунтовой массы является особой ветвью механики сплошной среды, а именно, грунтовый скелет в виде слабо уплотненной массы, впитанной атмосферными осадками еще больше смачиваются подземной водой и в результате образуется двухфазная сплошная среда специальной формы, так как обе фазы как и жидкая

так и твердая имеют одинаковые скорости, и перемещаются вниз как турбулентный поток грязевого массива с большой скоростью.

Как отмечено Н.М. Гельсеговым, грунтовой массой мы называли грунт, в порах которого имеется свободная вода, последняя подчиняется всем механическим законам, свойственным жидкостям, а именно: в ней под действием давления и силы тяжести возникают напоры, происходит движение воды из области больших напоров в сторону меньших.

Грунтовая вода в различных местах грунтовой массы подвержена различным давлениям, причем эти давления могут быть больше атмосферного, тогда вода называется гравитационной водой, а если давление меньше атмосферного, то вода -будет называться капиллярной водой. Таким образом, внутри грунтовой массы происходят фильтрационные и инфильтрационные процессы, подчиняющихся законам подземной гидродинамики. Предположим, что отсек склона горы под действием атмосферных осадков и подземных вод увлажняется и происходит нарушение равновесия горного склона, и в результате увлажненный горный массив происходит в движение, т.е. происходит внезапное оползание данного отсека. Таков принцип возникновения оползневых явлений в ряде территорий земного шара.

Для оползней гидродинамического происхождения под гидрометеорологическим условием следует понимать фильтрационные и инфильтрационные процессы. Таким образом, оползни гидродинамического происхождения формируются на основании геологических условий и рельефа местности. А смещаются под действием фильтрационных и инфильтрационных процессов. Здесь согласно фильтрационным процессам подземные воды поднимаются вплоть до плоскости скольжения, а в результате инфильтрационного процесса поверхностные влаги спускаясь до плоскости скольжения,

встречаются с частицами подземных вод и образуется линия скольжения, где происходит максимальное увлажнение слабоуплотненных пород вдоль основного деформируемого массива, т. е. На плоскости скольжения слабоуплотненные горные породы, как правило, песчано-глинистые массы разжижаются и под действием силы тяжести вдоль критической линии скольжения происходит оползание определенной части основного деформируемого массива. Из-за большой крутизны горного склона скорость движения оползающего массива быстро растет и слабоуплотненные породы в виде водно-глинистой массы очень быстро смещаются вниз по рельефу на большие расстояния. Здесь расстояние оползания достигает до несколько сот метров, ширина изменяется десятками метров, глубина иной раз достигает до 4-5 метров. Поэтому такие формы перемещение оползней гидродинамического происхождения можно мысленно моделировать как движение грязевого потока в поле силы тяжести со свободной поверхностью, где глубина слоя потока достаточно мала по сравнению с размерами ширины и длины, причем, перемещения происходят в каналах бесконечной ширины. При этом глубина потока предполагается постоянной вдоль ширины канала. Сечение канала имеет произвольную форму и может меняться вдоль его длины. Поэтому такие формы перемещения оползней гидродинамического происхождения можно мысленно моделировать . как одномерное течение гипотетической жидкости в канале с неограниченной длиной. Чтобы оползневой поток рассматривать, как течение эффективной жидкости будем считать выполненными еще следующие допущения:

1. Грязеводный поток гипотетической жидкости считается как односкоростная сплошная среда;
2. Поперечная компонента скорости жидкости очень мала по сравнению с продольной и его можно пренебречь, а продольная

скорость, следует считать постоянной, вдоль толщины слоя и уровень жидкости в поперечном сечении - горизонтален.

На основании таких допущений, одномерные перемещения гипотетической жидкости описываются гидродинамическими уравнениями теории "мелкой воды", которые решаются современными численными методами. На основании полученных данных нетрудно определить ряд физико-механических параметров природных оползневых процессов гидродинамического происхождения, а также селевых потоков оползневых типов, связанных с выпадением большого количества атмосферных осадков и интенсивным снеготаянием.

Если рассматриваемый процесс происходит на плоскости или на осесимметрическом пространстве, тогда уравнение неразрывности, или иногда его называем уравнением сохранения массы имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \delta \frac{\partial(\rho v)}{y} = 0 \quad (1)$$

где $\delta = 0$ - для двумерного случая и для осесимметричного $\delta = 1$.

Для одномерного движения, уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

здесь ρ - плотность гипотетической жидкости, представляющий собой смесь грязеводного массива, U – продольная скорость одномерного двухфазного грязеводного потока.

Уравнение движения вязкой сжимаемой грязеводной

гипотетической жидкости:

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) = F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3)$$

Здесь два уравнения (2) и (3), а неизвестных три: давление жидкости - P , плотность и скорость грязеводного массива ρ и U . Поэтому третьим уравнением будет характеристическое уравнение состояния:

$$P=F(\rho;T) \quad (4)$$

Давление P (отсчитываемое от атмосферного давления на свободной поверхности) меняется по глубине жидкости согласно гидростатическому закону: $P = \rho \cdot g \cdot (h - z)$, где Z – высота точки над дном.

Явный вид уравнения состояния пока неизвестно. С другой стороны, если исходим из принципа, так называемой «теории мелкой воды» и считаем, искомыми величинами считаются глубина грязевого потока – « h » и продольная скорость потока – « U », тогда для одномерного течения жидкости в канале, зависящего только от одной координаты « x » и времени « t » имеют место следующие дифференциальные уравнения в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = A_1((G_1 + G_2) \sin \alpha - \\ A_2(G_1 + G_2) \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi + A_3 H_0 \frac{\partial H}{\partial x} \sin \alpha) \end{cases} \quad (5)$$

$F_1 = (G_1 + G_2) \cdot \sin \alpha$ – сила сдвига, возникающая за счет силы тяжести, где G_1 – вес верхней сухой части слоя, толщиной D_1 и выражается формулой $G_1 = \gamma_e \cdot W_e \cdot D_1 \cdot \ell$, G_2 – вес нижней, насыщенной части слоя толщиной равной D_2 и выражается соотношением $G_2 = \gamma_n \cdot W_n \cdot D_2 \cdot \ell$, где D_1 и D_2 – толщины слоев, W_e – влажность грунта естественной насыщенности; W_n – влажность грунта при полном насыщении водой, γ_e – объемный вес рыхлообломочного слоя при естественном насыщении, γ_n – объемный вес грунта при полном насыщении.

$F_2 = -N \operatorname{tg} \varphi$ – сила внутреннего трения; здесь $N = (G_1 + G_2) \cos \alpha$ – нормальные составляющие силы тяжести.

$F_3 = H_0 \frac{\partial H}{\partial x} \sin \alpha$ - сила, связанная с фильтрационным давлением.

Для численного решения уравнений используется разностная схема. Введем конечно-разностную сетку для одномерного течения жидкости в канале зависящего только от одной координаты "x" и времени "t", где для решения системы (5) нелинейных уравнений выдвигаются следующие начальные и граничные условия.

а) начальные условия:

$$U(x, t_0) = U_0(x)$$

$$h(x, t_0) = h(x) \quad \text{при } t = t_0 \quad (6)$$

б) граничные условия:

$$U(x_0, t) = U_0(t) \text{ при } x = x_0, \quad h(x_k, t) = 0; \quad U(x_{1k}, t) = 0.$$

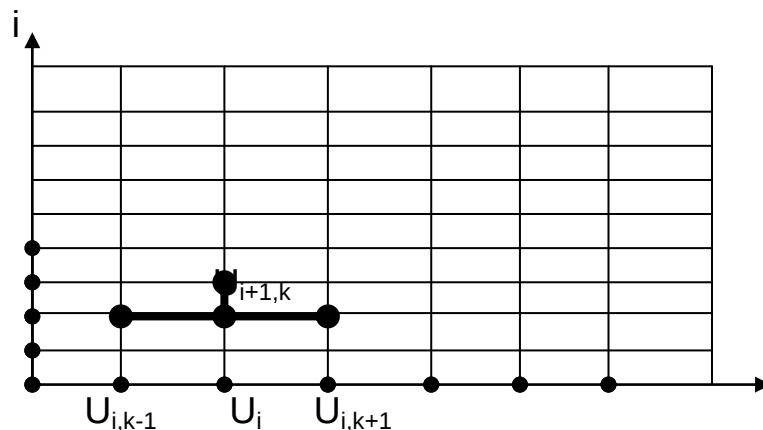
Решение ищется в области G, $[0 \leq x \leq 1] \times [0 \leq t \leq T]$

Для системы уравнений (5) введем разностную сетку

$X_i = i\Delta X$, $Y_j = j\Delta y$, где ΔX , Δy , Δt

Пространственные и временные шаги $i=1, 2, \dots, M$, $j=1, 2, \dots, N$, $n=0.1$

Уравнение системы (5) представляет собой уравнение параболического типа, для решения которого используется явная конечно-разностная схема. Преимуществом данной схемы является ее абсолютная устойчивость, что дает возможность вести расчеты, с большим шагом по времени и второй порядок точности по времени и по пространственной переменной.



Значение функции в узлах сетки будем обозначать $U_{i,k}=U(X_k,t_i)$. Тогда дифференциальные уравнения (1) приближенно заменится разностной схемой

$$\begin{aligned} \frac{h_{i+1,k} - h_{i,k}}{\Delta t} + U_{i,k} \frac{h_{i,k+1} - h_{i,k}}{\Delta x} + h_{i,k} \frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{\Delta x} &= 0 \\ \frac{U_{i+1,k} - U_{i,k}}{\Delta t} + U_{i,k} \frac{U_{i,k+1}}{\Delta x} + g \frac{h_{i,k+1} - h_{i,k}}{\Delta x} &= f_{i,k} \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты берутся с n- го слоя. Распределения «U», «h» рассчитываются в следующей последовательности: с учетом граничных и начальных условий (6) используются $U_{i,k}$, $h_{i,k}$ рассчитываются $U_{i+1,k}$, $h_{i+1,k}$ на одном слое, делаем переход последующего слоя. Затем процедура повторяется по итерационному циклу до выполнения условия.

Независимые переменные приводятся в безразмерную форму, тогда их можно назвать приведенным расстоянием, считая, что самое максимальное расстояние вдоль которого движется оползень или селевой поток. Тогда приведенное расстояние или безразмерная независимая переменная есть

1. $\tilde{X} = \frac{X}{L}$ данная величина измеряется от 0 до 1
2. $\tilde{t} = \frac{t}{T}$ где T- максимальное время

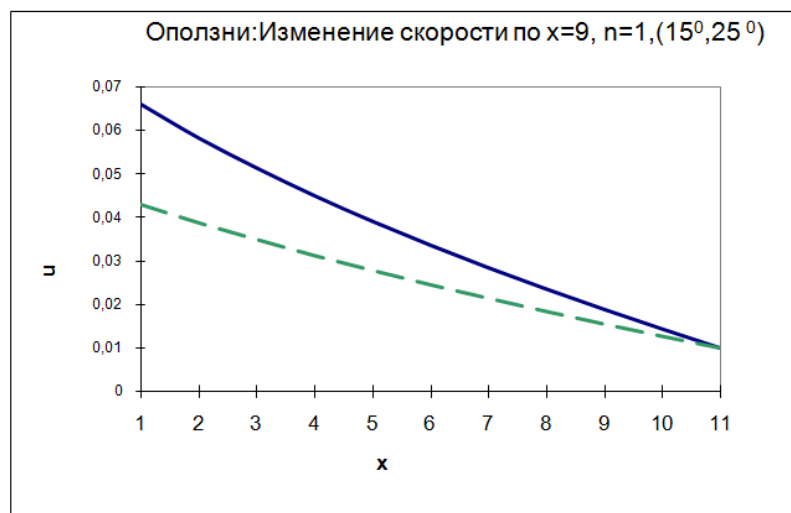
Чтобы обеспечить практическую сходимость $\tilde{X}$, $\tilde{t}$ берутся намного меньше единицы. Искомые переменные: скорость (продольная составляющая) U, и глубина h. В безразмерной форме

будет $\tilde{U} = \frac{U}{U_{\max}}$, $\tilde{h} = \frac{h}{h_{\max}}$. Для обезразмеривания введем выше указанную замену и в последующем для удобства оставим за безразмерными величинами старые обозначения.

Исходными данными в численной реализации модели движения оползневого потока являются значения констант селевой массы q , G , r_0 , C , A H_0 , задаются α , n .

С целью оценки эффективности модели движения потока и определение констант модели была проведена серия численных расчетов по моделированию реальных оползней.

	Расчет оползневого потока			Вариант 1: $a=25$ ----1	
$R_0=0.01$	$G_1=0.2$	$C=0.01$	$A=0.3$	$U(t_0) \ k=0.01$	$H(t_0) \ k=0.01$
$n=1$	$G_2=0.004$	$H_0=0.2$	$B=0.7$	$U(x_0) \ k=0.02$	$H(x_0) \ k=0.03$



Изменение скорости

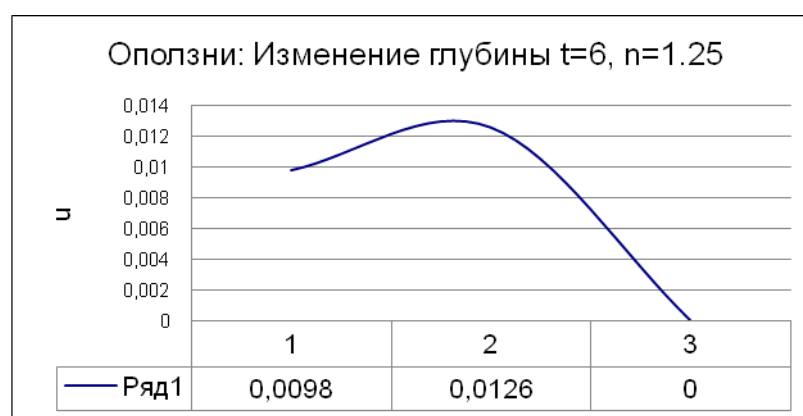


Рис 2. Изменение глубины по времени



Рис 3 Изменение скорости по x

Константы модели по признаку влияют на количественные характеристики расчетного потока, в основном максимальный расход и скорость. Несмотря на указанные ограничения, экспериментальные ограничения и наши расчетные данные качественно согласуются. На обоих рисунках видно действие силы тяжести. По результатам проведенных численных расчетов можно заключить, что показана адекватность модели на основании достаточной близости расчетных характеристик модели с имеющимися наблюдаемыми и измеренными характеристиками прошедших оползневых потоков, а также экспериментальных оползневых потоков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оползни//БСЭ. 3-е изд. - М., 1974. - Т. 18. - С. 429-430
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. - М.: Изд-во физико-математической литературы, 1963. Т. 1. - 575 с.
3. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. -420 с.
4. Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. - М.: Изд-во иностр. литературы, 1959. 617 с.

5. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. - М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2001. — 608 с.
6. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов. М.: Изд-во МГУ, 1997. -178 с.
7. Емельянова Е.П. Основные закономерности оползневых процессов. М.: Недра, 1972.-308 с.
8. Численные методы в динамике жидкостей/Джеймсон Э., Мюллер Т., Боллха-уз У., Краус В., Шмидт В., Белоцерковский О.; ред. Вирц Г., Смолдерен Ж. М.: Мир, 1981.-407 с.
9. Шадунц К.Ш. Механизм оползней потоков в глинистых породах//Известия вузов. Геология и разведка. 1976. - № 2. - С. 154-155
10. Шадунц К.Ш. Оползни-потоки. М.: Недра, 1983. - 120 с.
11. Шадунц К.Ш. Расчет скоростей движения оползней-потоков//Геологические факторы формирования оползней и селевых потоков и вопросы их оценки. — 1976. — С. 4-12.
12. Бийбосунов А.И., Орозобекова А.К., Ташиев А.А. «Аналитические методы решения коэффициента устойчивости горных склонов», Сборник «Современные проблемы механики сплошных сред/ Гидрогазодинамика и экзогенно-геологические процессы природы» вып.6, Бишкек, 2007 г.

УДК: 519.622(045/046)

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДАМ ЭЙЛЕРА.**

М.М.Султанова

Бишкекский колледж компьютерных систем и технологий.

Как известно, решение дифференциальных уравнений является сложной задачей и метод Эйлера в настоящее время одним из наиболее употребительных методов для решения дифференциальных уравнений. Главным его достоинством является очень быстрая сходимость последовательных приближений к точному решению.

Метод Эйлера относится к численным методам, дающим решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$. Он является сравнительно грубым и применяется в основном для ориентировочных расчетов. Однако идеи, положенные в основу метода Эйлера, являются исходными для ряда других методов.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

с начальным условием

$$x = x_0, y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Требуется найти решение уравнения (1) на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей и получим последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, где $x_i = x_0 + ih$ ($i=0, 1, \dots, n$), а $h = (b-a)/n$ - шаг интегрирования.

В методе Эйлера приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ вычисляются последовательно по формулам $y_i + hf(x_i, y_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots$).

При этом искомая интегральная кривая $y=y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной $M_0M_1M_2\dots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots$); каждое звено M_iM_{i+1} этой ломаной, называемой **ломаной Эйлера**, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения (1), которая проходит через точку M_i .

Если правая часть уравнения (1) в некотором прямоугольнике $R\{|x-x_0| \leq a, |y-y_0| \leq b\}$ удовлетворяет условиям:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2| \quad (N=\text{const}),$$

$$|df/dx| = |df/dx + f(df/dy)| \leq M \quad (M=\text{const}),$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n) - y_n| \leq hM/2N[(1+hN)^n - 1], \quad (3)$$

где $y(x_n)$ -значение точного решения уравнения(1) при $x=x_n$, а y_n -приближенное значение, полученное на n -ом шаге.

Формула (3) имеет в основном теоретическое применение. На практике иногда оказывается более удобным двойной просчет: сначала расчет ведется с шагом h , затем шаг делят и повторный расчет ведется с шагом $h/2$. Погрешность более точного значения y_n^* оценивается формулой

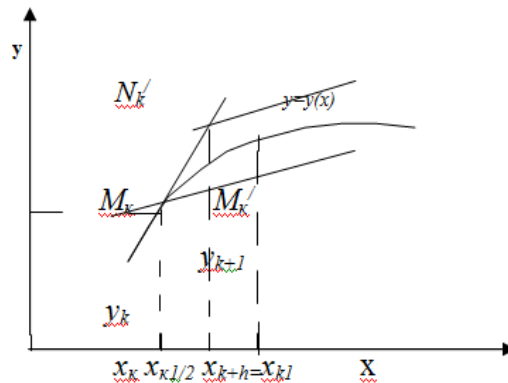
$$|y_n - y(x_n)| \approx |y_n^* - y_n|.$$

Метод Эйлера легко распространяется на системы дифференциальных уравнений и на дифференциальные уравнения высших порядков. Последние должны быть предварительно приведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Эйлером был предложен модифицированный метод для решения дифференциального уравнения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) $y'=f(x,y)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$. Разобьем наш участок интегрирования

на n равных частей. На малом участке $[x_0, x_0+h]$ интегральную кривую заменим прямой линией. Получаем точку $M_k(x_k, y_k)$.



Через M_k проводим касательную: $y=y_k+f(x_k, y_k)(x-x_k)$.

Делим отрезок (x_k, x_{k+1}) пополам:

$$x'_{Nk}=x_k+h/2=x_{k+1/2}$$

$$y'_{Nk}=y_k+f(x_k, y_k)h/2=y_k+y_{k+1/2}$$

Получаем точку N'_k . В этой точке строим следующую касательную:

$$y(x_{k+1/2})=f(x_{k+1/2}, y_{k+1/2})=\alpha_k$$

Из точки M_k проводим прямую с угловым коэффициентом α_k и определяем точку пересечения этой прямой с прямой X_{k+1} . Получаем точку M'_k . В качестве y_{k+1} принимаем ординату точки M'_k . Тогда:

$$y_{k+1}=y_k+\alpha_k h$$

$$x_{k+1}=x_k+h$$

$$\alpha_k=f(x_{k+h/2}, y_k+f(x_k, Y_k)h/2) \quad (4)$$

$$y_k=y_{k-1}+f(x_{k-1}, y_{k-1})h$$

(4)-рекуррентные формулы метода Эйлера.

Сначала вычисляют вспомогательные значения искомой функции $y_{k+1/2}$ в точках $x_{k+1/2}$, затем находят значение правой части уравнения (1) в средней точке $y'_{k+1/2}=f(x_{k+1/2}, y_{k+1/2})$ и определяют y_{k+1} .

Для оценки погрешности в точке x_k проводят вычисления y_k с шагом h , затем с шагом $2h$ и берут $1/3$ разницы этих значений:

$$|y_k^*-y(x_k)|=1/3(y_k^*-y_k),$$

где $y(x)$ -точное решение дифференциального уравнения.

Таким образом, методом Эйлера можно решать уравнения любых порядков. Например, чтобы решить уравнение второго порядка $y''=f(y',y,x)$ с начальными условиями $y'(x_0)=y'_0$, $y(x_0)=y_0$, выполняется замена:

$$y'=z$$

$$z'=f(x,y,z)$$

Тем самым преобразуются начальные условия: $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$, $z_0=y'_0$.

Рассмотрим вопрос о применении метода Эйлера к дифференциальным уравнениям. Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y'=2x-y$$

Требуется найти решение на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h=(1-0)/5=0,2$

Начальные условия: $y_0=1$;

Пользуясь рекуррентными формулами (4), находим:

$$1). x_1=0,2; x_{1/2}=0,1; y(x_1)=y(x_0)+\alpha_0 h; y(x_{1/2})=y(x_0)+f(x_0,y_0)h/2;$$

$$f(x_0,y_0)=2*0-1=-1$$

$$y(x_{1/2})=1-1*0,1=0,9$$

$$\alpha_0=2*0,1-0,9=-0,7$$

$$y_1=1-0,1*0,2=\underline{0,86}$$

$$2). y(x_2)=y(x_1)+\alpha_1 h; x_2=0,2+0,2=0,4; x_{1+1/2}=x_1+h/2=0,2+0,1=0,3$$

$$y(x_{1+1/2})=y(x_1)+f(x_1,y(x_1))h/2$$

$$f(x_1,y_1)=2*0,2-0,86=-0,46$$

$$y(x_{1+1/2})=0,86-0,46*0,1=0,814$$

$$\alpha_1=2*0,3-0,814=-0,214$$

$$y_2=0,86-0,214*0,2=\underline{0,8172}$$

$$3). x_3=0,4+0,2=0,6; x_{2+1/2}=x_2+h/2=0,4+0,1=0,5$$

$$f(x_2,y_2)=2*0,4-0,8172=-0,0172$$

$$y_{2+1/2}=0,8172-0,0172*0,1=0,81548$$

$$\alpha_2 = 2 \cdot 0,5 - 0,81548 = 0,18452$$

$$y_3 = 0,8172 + 0,18452 \cdot 0,2 = \underline{0,854104}$$

$$4). x_4 = 0,8; \quad x_{3+1/2} = x_3 + h/2 = 0,6 + 0,1 = 0,7$$

$$f(x_3, y_3) = 2 \cdot 0,6 - 0,854104 = 0,345896$$

$$y_{3+1/2} = 0,854104 + 0,345896 \cdot 0,1 = 0,8886936$$

$$\alpha_3 = 2 \cdot 0,7 - 0,89 = 0,5113064$$

$$y_4 = 0,854104 + 0,5113064 \cdot 0,2 = \underline{0,95636528}$$

$$5). x_5 = 1; \quad x_{4+1/2} = 0,8 + 0,1 = 0,9$$

$$f(x_4, y_4) = 2 \cdot 0,8 - 0,956 = 0,64363472$$

$$y_{4+1/2} = 0,956 + 0,643 \cdot 0,1 = 1,020728752;$$

$$\alpha_4 = 2 \cdot 0,9 - 1,02 = 0,779271248$$

$$y_5 = 0,956 + 0,7792 \cdot 0,2 = \underline{1,11221953}$$

Рассмотрим уравнение второго порядка:

$$y'' = 2x - y + y'$$

Находим решение на том же отрезке $[0, 1]$ с шагом $h=0,2$;

Замена: $y' = z$

$$z' = 2x - y + z$$

Начальные условия: $y_0 = 1$

$$z_0 = 1$$

$$1). x_1 = 0,2; \quad x_{1/2} = 0,1$$

$$y(z_1) = y(z_0) + \alpha_0 h$$

$$z(x_1, y_1) = z(x_0, y_0) + \beta_0 h$$

$$y(z_{1/2}) = y(z_0) + f(z_0, y_0) h/2$$

$$z(x_{1/2}, y_{1/2}) = z(x_0, y_0) + f(x_0, y_0, z_0) h/2$$

$$f(z_0, y_0) = f_{10} = 1$$

$$f(x_0, y_0, z_0) = f_{20} = 2 \cdot 0 - 1 + 1 = 0$$

$$y_{1/2} = 1 + 1 \cdot 0,1 = 1,1$$

$$z_{1/2} = 1 + 0 \cdot 0,1 = 1$$

$$\alpha_0 = z_0 = 1$$

$$\beta_0 = 2 \cdot 0,1 - 1,1 + 1 = 0,1$$

$$y_1 = 1 + 0,2 \cdot 1 = \underline{1,2}$$

$$z_1 = 1 + 0,2 \cdot 0,1 = \underline{1,02}$$

$$2). x_2 = 0,4; \quad x_{1+1/2} = 0,3$$

$$f_{11} = z_1 = 1,02$$

$$f_{21} = 2 \cdot 0,2 - 1,2 + 1,02 = 0,22$$

$$y_{1+1/2} = 1,2 + 1,02 \cdot 0,1 = 1,1$$

$$z_{1+1/2} = 1,02 + 0,22 \cdot 0,1 = 1,042$$

$$\alpha_1 = z_{1+1/2} = 1,042$$

$$\beta_1 = 2 \cdot 0,3 - 1,302 + 1,042 = 0,34$$

$$y_2 = 1,2 + 1,042 \cdot 0,2 = \underline{1,4084}$$

$$z_2 = 1,02 + 0,34 \cdot 0,2 = \underline{1,088}$$

$$3). x_3 = 0,6; \quad x_{2+1/2} = 0,5$$

$f_{12}=z_2=1,088$	$f_{22}=2*0,4-1,4084+1,088=0,4796$
$y_{2+1/2}=1,4084+1,088*0,1=1,5172$	$z_{2+1/2}=1,088+0,4796*0,1=1,13596$
$\alpha_2=z_{2+1/2}=1,13596$	$\beta_2=2*0,5-1,5172+1,13596=0,61876$
$y_3=1,4084+1,136*0,2=\underline{1,635592}$	$z_3=1,088+0,61876*0,2=\underline{1,211752}$
4). $x_4=0,8$; $x_{3+1/2}=0,7$	
$f_{13}=z_3=1,211752$	$f_{23}=2*0,6-1,636+1,212=0,77616$
$y_{3+1/2}=1,636+1,212*0,1=1,7567672$	$z_{3+1/2}=1,212+0,776*0,1=1,289368$
$\alpha_3=z_{3+1/2}=1,289368$	$\beta_3=2*0,7-1,7568+1,289=0,9326008$
$y_4=1,6+1,289*0,2=\underline{1,8934656}$	$z_4=1,212+0,93*0,2=\underline{1,39827216}$
5). $x_5=1$; $y_{4+1/2}=0,9$	
$f_{14}=z_4=1,39827216$	$f_{24}=2*0,8-1,893+1,398=1,10480656$
$y_{4+1/2}=1,893+1,398*0,1=2,0332928$	$z_{4+1/2}=1,398+1,105*0,1=1,508752816$
$\alpha_4=z_{4+1/2}=1,508752816$	$\beta_4=2*0,9-2,03+1,5=1,27546$
$y_5=1,893+1,5*0,2=\underline{2,195216163}$	$z_5=1,398+1,275*0,2=\underline{1,65336416}$

В этой статье приведены применения метода Эйлера к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При решении задач дифференциального уравнения методом Эйлера получается как можно более точное значение в вычислениях уравнений. Полученные результаты методом, совпадают с результатами аналитического решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Копченова Н.В., Морон И.Л., Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука 1972 г. – 368с.
2. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.:Наука 1965г. – 386с.

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД
Выпуск двадцать первый, 2015 г.

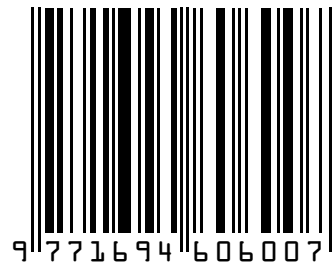
СОДЕРЖАНИЕ

стр

1.	АЛЕШИН Ю.Г., ТОРГОЕВ И.А. Комбинированная модель прогноза смещения оползня..	3
2.	БИЙБОСУНОВ А.И., ТАБЫШОВ Р. Модель математического моделирования процессов солепереноса в почвогрунтах.....	20
3.	КАЗАКБАЕВА Г.О. Влияние трещины на распределение остаточных напряжений вблизи выработки в оптически активной модели	25
4.	МАНЖИКОВ Б.Ц. Приливные движения потенциально неустойчивых скальных массивов на участке Токтогульской ГЭС.....	34
5.	БИЙБОСУНОВ А.И., ЖУСУПБЕКОВА С.Т. Исследование течения газа в пограничном слое в газопроводе.....	44
6.	ИСМАНОВ Ю. Х., КУЛМУРЗАЕВ Н. М. Обратные задачи в оптике фазовых сред.....	51
7.	ОСМОНКАНОВ А.М., СУЛТАНОВА М.М. О методах Эйлера и Рунге-Кутта для решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	59
8.	ЧЕЧЕЙБАЕВ А.Б., ЧЕЧЕЙБАЕВА Э.Б., ЭСТЕБЕСОВА Н.Т. Моделирование взрыва в атмосферном газе методом крупных частиц Давыдова	66
9.	СЫДЫКОВА А.С., ТИЛЕГЕНОВ К., ЭМИЛЬБЕКОВ Б.Э. Об устойчивости левобережного склона Токтогульской ГЭС.....	76
10.	ЧЕЧЕЙБАЕВ А.Б., ЧЕЧЕЙБАЕВ Б., ЭСТЕБЕСОВА Н.Т. Об алгоритме метода крупных частиц для расчета сжимаемых течений газа в рамках модели Навье- Стокса в случае плоской и цилиндрической геометрий	83

11.	ТУРСУНОВА Б.К., ТОКТОГУЛОВА А.Ш., ОРОЗОБЕКОВА А.К. Решение краевой задачи изменения глубины оползневого горного склона.....	90
12.	ТАБЫШОВ Р., НАРМАТОВА М.Ж., ШЕЙШЕНОВА Ш.К. Исследования двумерного уравнения теплопроводности при экспоненциальной и показательной зависимостям коэффициентов почвы от температуры	101
13.	ТУРСУНОВА Б.К., ТОКТОГУЛОВА А.Ш., ОРОЗОБЕКОВА А.К. Один из методов численного решения динамики оползневых процессов	107
14.	СУЛТАНОВА М.М. Численные методы для решения линейного дифференциального уравнения первого и второго порядка методами Эйлера.....	121
15	СОДЕРЖАНИЕ.....	127

ISSN 1694-6065



9 771694 606007